MOSAICOS

EL CAOS

Ivar Ekeland

MOSAICOS

Traducción de
JOËLLE RORIVE Y RICARDO VINÓS

Ivar Ekeland

EL CAOS

Una explicación para comprender
Un ensayo para reflexionar

siglo
veintiuno
editores

siglo veintiuno editores, s.a. de c.v.
CERRO DEL AGUA 248, DELEGACIÓN COYOACÁN, 04310, MÉXICO, D.F.

siglo xxi editores argentina, s.a.
LAVALLE 1634, 11 A, C1048AAN, BUENOS AIRES, ARGENTINA

portada y diseño de interiores: maría luisa martínez passarge
fotografías: p. 9, la tierra vista desde la luna;
p. 52, surcos glaciares en el cañón antílope en utah, estados unidos

primera edición en español, 2001

ISBN 968-23-2401-7

primera edición en francés, 1995

título original: *le chaos*

PRÓLOGO

En el callejón Berthaud, en París, cerca de donde hoy se ubican las estridentes tuberías metálicas del Centro Pompidou, se escondía un museo pequeño, actualmente desaparecido, consagrado a los instrumentos de música mecánica. Ahí se encontraban cosas sorprendentes: cajas de música, fonógrafos antiguos, órganos de Berbería, pianos mecánicos y autómatas vestidos que tocaban la trompeta. Había también un piano de cola en cuyo mecanismo se conservaba para la eternidad una ejecución de Paderewski, en el que se veían con emoción hundirse las teclas bajo los dedos de un artista muerto mucho tiempo atrás. La visita guiada se llevaba a cabo en una agradable cacofonía, en que cada instrumento tocaba su pequeña música, y uno salía distraído como después de un día de vacaciones, maravillado por tanto ingenio en los artificios.

Siempre me detenía delante de un juguete para niños que parecía estar ahí por azar, y delante del cual la visita guiada no solía dilatarse. Me paré frente a un pequeño gimnasta de trapo, protegido por un vidrio, agarrado a una barra fija. Como tenía ocupadas las manos, no tocaba ningún instrumento: se contentaba con dar vueltas alrededor de su barra. Aunque lo hacía con seguridad sorprendente, se movía de manera tan irregular que parecía animado por su propia voluntad, cambiando de parecer según su humor o deseo de fantasía: una vuelta a la izquierda, dos a la derecha; otras tres a la izquierda, y otras cinco a la derecha; las vueltas se encadenaban en uno y otro sentidos sin que uno pudiera prever lo que iba a hacer ese muñeco diabólico. Observar esos vuelcos permanentes, los incesantes cambios de dirección, bien merecía hacer apuestas: ¿Cuántas vueltas daría en un sentido antes de que se fuera por el otro?

El contraste hizo impacto en mi persona. Por un lado, la belleza mecánica que, por medio de un juego de fuelles y martillos, reproducía información codificada; vemos a los órganos de Berbería, por ejemplo, tragarse grandes pliegos de cartón doblado. Ciertamente son mecanismos admirables, ingeniosos, pero sin misterio: la música es conocida, sabemos qué nota seguirá. Si uno quiere escucharla de nuevo, basta con volver a activar la máquina; tocará la misma melodía de la misma manera, y no tardaremos mucho en fastidiarnos de la misma canción. Por otro lado, tenemos a un muñeco que da vueltas alrededor de una barra fija, modestamente pero sin repetir jamás un movimiento: cuando se lanza, uno no sabe de qué lado irá, y cuando se ha ido por un lado, no se sabe ni por qué ni por cuánto tiempo permanecerá ahí. Es un espectáculo fascinante porque siempre sorprende, o sea, es siempre nuevo, y se puede apostar que el bonito autómata acabará en el armario de cachivaches mucho antes que el muñeco.

De un lado, tenemos mecanismos complicados, sin duda, pero previsibles. Del otro, ¿qué? ¿Cómo se llama lo que solamente se puede observar, sin entender lo que pasa ni adivinar lo que va a pasar? Eso tiene un nombre muy bonito, querido lector: se llama azar. Ante todo, vamos a aprender a identificarlo. Después, aprenderemos a fabricarlo.

La mecánica del azar

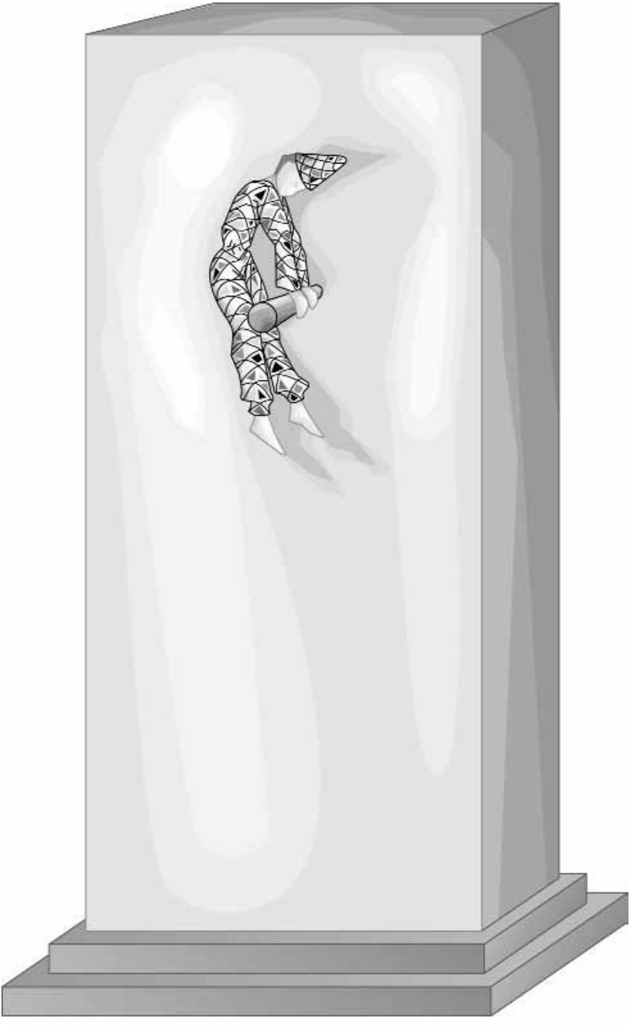
EL CAOS EXISTE, ME LO HE ENCONTRADO

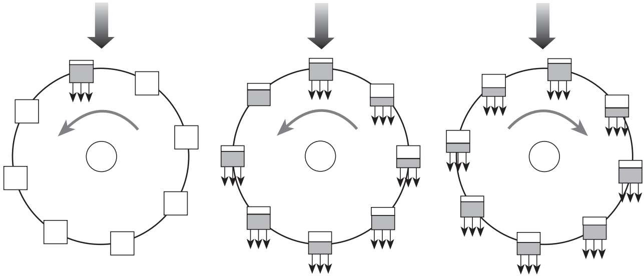
Una vuelta a la pista

OBSERVEMOS de nuevo a nuestro saltimbanqui e intentemos concentrarnos en lo que tiene pertinencia general y, si me atrevo a decirlo, científica. El ambiente, la música, las explicaciones, mis impresiones, todo eso ha desaparecido, las colecciones se han dispersado, y no sé qué habrá sido de nuestro pequeño gimnasta. No importa: no es el azar de su destino lo que nos interesa, sino lo que se esconde detrás de sus revoluciones. ¡Adelante, echémoslo a andar!, y contemos las vueltas que da en cada sentido antes de pararse, ya sin aliento:

+5 2 2 2 2 2 3 2 2 3 1 4 4 1 2 3 4 3 5 2 4 3 1

Esto es lo que llamaremos protocolo de experimento. El signo (+) indica que la primera vuelta sucedió en el sentido de las manecillas del reloj; el signo (–) indicará lo contrario. Este protocolo significa, pues, que el gimnasta efectuó primero cinco vueltas en el sentido de las manecillas del reloj, seguidas por dos en el otro sentido, luego dos vueltas en el primer sentido, y otras dos en sentido contrario: en total 62





La rueda y el títere. *Ésta es una representación esquemática del títere de la calle Berthaud, a quien no he vuelto a ver. Invito a los lectores que lo hayan visto o que encuentren uno parecido, a que le tomen una foto y me la envíen. No es un objeto muy grande, de treinta centímetros, más o menos, y el muñeco está protegido por placas de vidrio, diez para ser exacto. Está hecho de tela ligera y disfrazado de arlequín. Sus brazos están fijos al eje de rotación, alrededor del cual da vueltas gracias a la acción de un mecanismo escondido tras él. Este mecanismo (arriba) es una rueda de molino sobre la cual cae arena contenida en un depósito. Los cubiletes se llenan y se vacían según su posición bajo el depósito de arena, y la rueda gira hacia un lado o el otro según la distribución del peso y su propia inercia. El eje de la rueda arrastra al muñeco, que da vueltas bajo el ojo del espectador. Cuando la arena acaba de caer, se vuelve a comenzar.*

vueltas, la última efectuada en el mismo sentido que las cinco primeras.

No existen, en ese protocolo de regularidad aparente, reglas de sucesión que permitan adivinar una cifra a partir de la precedente o las precedentes. Vemos que un 2 va seguido tanto por otro 2 como por un 3 o por un 4; de la misma manera, un par como 5/2 va seguido por un 2 tanto como por un 4. Si me pidieran *completar la serie* a partir de las 22 primeras cifras, es decir, adivinar la vigésimo tercera, no vería mejor cosa que proponer un 2, porque es la cifra que hasta ahora ha sido la más frecuente, y que por eso sería la más probable. Al hacer eso, evoco una de las creencias más antiguas de la humanidad: el futuro debe reproducir el pasado. Lo que ya se ha producido se reproducirá, y lo que ha sido frecuente ayer lo será mañana. Por eso, nuestros antepasados esperaban con cierta confianza que saliera el Sol después de haberse puesto el día anterior: ya que había salido un gran número de veces, no tendría por qué no volver a hacerlo. Podemos proseguir en esta dirección, y notar que, cada vez que sale el Sol, aumenta el número total de veces que ha salido, y así también aumenta la probabilidad de que vuelva a salir. Sobre estas bases podemos calcular (que sí, que sí se puede…) la probabilidad de que el Sol salga en la mañana, sabiendo que ha salido todos los días desde hace por lo menos cinco mil años; no más, porque si hubiera faltado a su deber antes de la invención de la escritura, no hubiesen existido medios para transmitir un evento tan extraordinario. Este cálculo existe en la literatura científica; lo hizo Laplace en 1812. La leyenda dice que Laplace apostó 1 828 214 a uno que el Sol saldría al día siguiente, sabiendo que cinco mil años son 1 828 213 días. Y hoy, por supuesto, sabiendo que el Sol ha cumplido 143 años más de servicio suplementario, estamos en condiciones aún más ventajosas.

Creo que el lector estará de acuerdo en que la ley de la gravitación de Newton, al igual que toda la mecánica celeste, constituye una razón mucho mejor para creer que el Sol saldrá mañana, y que por lo tanto podemos ver llegar la noche con más confianza que nuestros antepasados. Pero, en lo que concierne al pequeño gimnasta, hasta no saber más sobre la manera en que funciona, me encontraré tan desvalido como el hombre de las cavernas al encarar la cuestión de la sucesión de los días y las noches. Solamente puedo calcular las frecuencias de aparición basándome en las observaciones pasadas, y rezar para que dichas frecuencias sean respetadas en el futuro. De nuevo, estoy en peores condiciones que mis antepasados, ya que dependo de pocas observaciones: únicamente 22.

Pero, después de todo, también puedo acudir a otras observaciones. No estamos pidiendo que se levante el Sol, buscamos simplemente saber si una serie de cifras se construye conforme a cierta regla. Si existe una regla, permitirá que la serie continúe infinitamente, y nos dará no sólo la vigésima tercera cifra, sino también la vigésima cuarta, la milésima, la millonésima, o sea, nos serán dadas cuantas necesitemos para reconocerla. No hay un cero ni un 6 en las primeras 22 cifras: ¿los habrá más adelante? Observo que un 5 siempre va seguido por un 2: ¿será una particularidad de las 22 primeras cifras o será una regla general? En fin, con más datos uno se acerca más a las posibilidades, y para poder decidir si la sucesión de cifras sigue ciertas reglas o no, haría falta disponer de un protocolo que continúe indefinidamente. Sería solamente en este caso que se podrían realmente probar todas las reglas y eliminar cualquier duda.

El muñeco se para después de unas 60 vueltas y, por supuesto, no resulta fácil hacer que prosiga. Pero existe una alternativa: volverlo a lanzar. Manos a la obra, volvamos a empezar la experiencia:

-3 3 1 3 4 1 1 1 4 3 1 3 3 5 3 5 2 2 2 5 4 2

Una vez más:

-1 2 3 5 4 5 2 5 1 5 5 4 4 5 4 1 3 2

Y ahora dos más:

-1 3 2 4 1 4 5 3 5 1 5 3 5 1 3 5 4 3 2 2
+5 2 5 3 5 3 1 3 4 4 2 2 5 5 1 5 2 1 3

Podemos obtener tantos protocolos como queramos: su número está limitado solamente por nuestra paciencia, que aquí se ha agotado después del quinto, lo cual nos permite hacer ciertas comprobaciones al respecto. La primera es que la experiencia, repetida bajo las mismas circunstancias, no da los mismos resultados: no observamos cinco veces el mismo protocolo, sino cinco protocolos diferentes. La segunda comprobación es que estos protocolos no se parecen en nada; la elevada frecuencia de la cifra 2 en el primer lanzamiento no está confirmada por los demás. La tercera es que, si bien los cuatro nuevos protocolos confirman que las cifras se quedan entre 1 y 5, todavía no es posible poner en evidencia una regla de sucesión. Más aún, destruyen la regla que se habría podido formar en vista del primer lanzamiento: el 5 no necesariamente va seguido por un 2. También podemos considerar los cinco protocolos diferentes como uno solo, poniéndolos de corrido (sin usar los signos – ó +):

5 2 2 2 2 2 3 2 2 3 1 4 4 1 2 3 4 3 5 2 4 3 1 3 3 1 3 4
1 1 1 4 3 1 3 3 5 3 5 2 2 2 5 4 2 1 2 3 5 4 5 2 5 1 5 5 4
4 5 4 1 3 2 1 3 2 4 1 4 5 3 5 1 5 3 5 1 3 5 4 3 2 2 5 2 5
3 5 3 1 3 4 4 2 2 5 5 1 5 2 1 3…

Aquí tenemos una primera realización del protocolo infinito invocado hace un momento. Para seguir, basta con continuar las experiencias. Es lo que significan los tres puntos que figuran al final; dicen: “Atención, la lista no está terminada, tengo a su disposición tantas cifras como quiera, y es exclusivamente por cuestiones de espacio que no he escrito más que 102.” Sobre este protocolo infinito, o esta lista indefinida, haremos comprobaciones completamente análogas a las que hemos hecho hasta ahora.

Podemos resumirlas en una sola: ningún procedimiento permite deducir con certeza una de esas cifras a partir de las que la preceden. Digámoslo de otra manera, a la Cyrano, en términos libertarios: la única regla es que no hay regla. En términos metafísicos: el pasado no determina el presente. En la práctica: si usted quiere guardar diez millones de estas cifras en su computadora, solamente podrá hacerlo introduciendo una por una en la memoria; no existe programa que permita economizar tiempo o espacio.

No vayamos más lejos: el azar existe, nos lo hemos encontrado. Existe el azar cuando ya no podemos predecir de manera segura, cuando el pasado no determina completamente el presente, cuando una serie de observaciones no se dejan resumir. Es cierto que existen grados en la incertidumbre, y el manejo de las probabilidades* permite evaluar la parte del azar que esconde el futuro; las probabilidades cero y 1 representan la certeza, en un sentido y en otro, y las probabilidades intermedias reflejan el estado de la información que se puede obtener. En efecto, el azar es justamente esto, la incertidumbre del futuro, la imposibilidad de predecir de manera segura. Ahora que lo hemos identificado, veamos si lo podemos fabricar.

Máquinas del azar

Durante mucho tiempo se creyó que el azar se distinguía de su opuesto, el conocimiento del futuro, la previsibilidad total, como la victoria se distingue de la derrota: la primera tiene una multitud de parientes mientras la segunda es

* La primera vez que aparece un término importante de un vocabulario especializado, que se explica en el glosario, va seguido de un asterisco.

huérfana. Un evento depende del azar cuando concurren muchos factores para determinarlo, y no depende del azar si existen solamente uno o unos cuantos. Los eclipses solamente dependen de las posiciones relativas del Sol, la Tierra y la Luna, cuyos movimientos se pueden calcular: eso sí es fácil, ahí no existe el azar, tanto así que la fecha y el lugar del próximo eclipse aparecen en el periódico. El tiempo que va a hacer depende de una cantidad de factores cambiantes —los vientos, las corrientes, las temperaturas y las presiones, las posiciones de los ciclones y los anticiclones—, y ¿quién puede tomar en cuenta toda esta información más allá de algunos días? El resultado está ahí, y vemos que el tiempo cambia todo el tiempo. No sólo no me pueden decir si hará buen tiempo en Gran Bretaña este verano, o si habrá nieve en los Pirineos este invierno, sino que ya no existe ninguna certidumbre respecto al clima: tenemos a Europa entera inundada, después de años de sequía durante la cual nos habían predicho una escasez crónica de agua. Esto es el azar, a menos que yo no sepa nada al respecto, y cuando la sabiduría popular expresa que el clima se ha estropeado, es una manera de expresar la definición que hemos dado: la única regla es que no hay reglas.

Volvamos al muñeco, y veamos qué se esconde tras la pared donde maniobra el gimnasta (véase p. 13). Ahí encontramos un gran depósito de arena, que vierte su contenido sobre una rueda de molino, cuyos ejes sujetan un cubilete en su extremidad. Estos pequeños recipientes están llenos de hoyos, y la arena que reciben se escurre como agua en un colador. Al desencadenarse el movimiento, la reserva se vierte en el primer cubilete, que se encuentra debajo de ella. El peso de éste arrastra a la rueda, que empieza a oscilar e inicia una rotación. Al hacerlo, el cubilete queda fuera del alcance de la reserva de arena, y empieza a vaciarse en seguida, mientras que la rueda acelera su movimiento y trae un segundo cubilete bajo la reserva de arena, y luego un tercero, un cuarto, cada uno recibiendo al pasar su dosis de arena. Dicha dosis depende, por supuesto, de la velocidad de rotación: cuanto más rápidamente gire la rueda, menor será el tiempo que tenga el cubilete para llenarse, y la dosis recogida será escasa. Simultáneamente, cada uno de los cubiletes se vacía, o se aligera, a un ritmo que sólo depende del diámetro de los hoyos por los que se escurre la arena.

La combinación de estos dos efectos, llenar a un ritmo que depende de la velocidad de rotación y derramar a un ritmo constante, da como resultado una repartición irregular de los cubiletes llenos o vacíos. Ahora bien, mientras más lleno esté el cubilete, pesará más, y arrastrará la rueda en un sentido, y después, una vez que haya pasado al otro lado, girará en sentido opuesto. La distribución de la masa en cada una de las partes de la rueda estará entonces en cambio perpetuo, con aceleraciones y desaceleraciones, como consecuencia de fases de movimientos rápidos intercalados con momentos de equilibrio. Si se fijan los brazos del muñeco al eje de la rueda, lo veremos dar vueltas al capricho del movimiento, y bastará con disimular el mecanismo tras una pared para crear la ilusión de un acróbata que varía sus figuras a fin de entretener al público.

¿Por qué analizar tanto al muñeco? No hay mejor manera de ilustrar la gran lección de la teoría del caos: la incertidumbre no está ligada a la complejidad. La multiplicidad de los factores y las causas no es la única fuente de azar; también se puede fabricar con mecanismos muy simples. Estos mecanismos pueden ser físicos, como el saltimbanqui de la calle Berthaud, o intelectuales, como ciertos modelos matemáticos. Cada uno a su manera son simples, es decir, sólo incluyen un pequeño número de factores, que generan el azar por sí mismos, sin recurrir a fuentes externas. Estos mecanismos tienen un nombre en común: sistemas caóticos.

Esto encierra una legítima paradoja: ¿por qué resulta la incertidumbre a partir de la nada? Conocemos el funcionamiento del sistema, sabemos de qué factores depende, y no hay intervención exterior; sus transformaciones no deberían causar sorpresa. Ahora que hemos visto lo que hay detrás del muñeco y hemos comprendido su mecanismo, lo podemos ajustar, determinar la cantidad de arena y definir la posición de la rueda. ¿Dónde está, pues, el azar? El gimnasta no tiene margen de libertad, su movimiento está completamente determinado, y si los arreglos iniciales son los mismos, las sucesiones deben ser idénticas. Sin embargo, no es lo que observamos. Si hacemos el experimento dos veces seguidas, por más que ajustemos los arreglos iniciales, no obtendremos los mismos resultados. No hay dificultad en reproducir las primeras series de oscilación. Empero, a partir de cierto momento, situado entre la décima y vigésima vuelta, se produce una ruptura: los dos movimientos se separan, y las últimas series de oscilación ya no tienen nada que ver una con la otra.

La teoría del caos estudia cómo sucede esto, cómo adquieren los mecanismos a lo largo de sus movimientos una libertad de la cual no gozan al principio. La respuesta se encuentra en el margen tenue que separa el cero matemático del casi nada, la exactitud absoluta de la mejor aproximación. Ese margen parece ser infinitamente pequeño, y reductible a discreción, pero vamos a ver que los sistemas caóticos juegan el papel de microscopio, y se amplifican a las dimensiones del Universo.

Se suelen concebir ideas falsas sobre el tamaño del Universo; es a la vez muy grande y muy pequeño. Ciertamente muy grande: el telescopio espacial Hubble acaba de descubrir la presencia de helio a quince mil millones de años luz. Ahí también opera la magia de los números, y esa cifra se escribe sin pensar en la distancia que representa. Sin embargo, eso quiere decir que a 300 mil kilómetros por segundo, la luz que percibimos hoy ha tardado 15 mil millones de años en llegar aquí, y es entonces uno de los testigos del *big bang* original. No se puede ser más grande.

Si existiera un mapa general del Universo, se representaría a una escala inimaginable, del orden de uno por un millón de mil millones de mil millones; no se vería gran cosa, sería como si hubiera montones de galaxias flotando en el vacío como motas de polvo en el aire. Imaginemos que dicho mapa es tridimensional, y que está disponible en una computadora de modo interactivo, como lo son ahora los mapas de navegación. Si se quieren distinguir los detalles, hace falta agrandar la imagen que aparece en la pantalla, enfocando el *zoom* sobre la región de interés. Se requiere simplemente hacer clic en la pantalla con el ratón. Para establecer las ideas, digamos que el *zoom* agranda diez veces. Si todavía no se ve nada, se enfoca otra vez; esta nueva imagen, la tercera, se ha agrandado cien veces con respecto a la imagen inicial.

Después de tres *zooms*, aparece nuestra galaxia, la Vía Láctea, un punto luminoso entre otros, y al agrandarlo dos veces más, obtenemos una imagen detallada. A continuación, penetramos en su interior; cinco *zooms* más adelante se ve el Sol, cinco más y se ve la Tierra, cinco más y obtenemos una carta terrestre a la millonésima, seis *zooms* más adelante y habremos conseguido la escala de la unidad: los objetos están representados en su tamaño real. A fin de cuentas, entre la escala humana y la escala del universo solamente hay 25 *zooms*, 25 potencias de diez, 25 decimales. Seguimos bajando: cinco pasos más adelante se pueden admirar los hematíes y los leucocitos, cuatro pasos más todavía y se distinguen los átomos. El núcleo reside cinco pisos más abajo, sin embargo, a partir de ahí no se ve más porque ya nos encontramos en la escala de un fotón de luz; de aquí en adelante, resulta un objeto demasiado grande para iluminarnos. Los quarks son los objetos más pequeños conocidos, y se encuentran dos o tres pisos más abajo.

De las galaxias a los quarks en 43 imágenes: se han realizado una película y un libro (*Powers of Ten*), y el recorrido es sorprendente. No existe mejor manera de tocar con el dedo la pequeñez de nuestro universo físico: de los objetos más grandes que contiene a los últimos constituyentes de la materia, se deslizan nada menos que unas 40 potencias de diez.

La conclusión es que en la física la precisión es limitada. En la medida en que se le puede asignar un tamaño, porque en la escala subatómica esta noción se esfuma, un quark tiene aproximadamente 0.000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 01 veces las dimensiones de la Vía Láctea. De lo más grande a lo más pequeño, no hay más que 40 decimales. Sería en vano querer obtener una medida con más precisión. En cambio, en las matemáticas, la precisión es ilimitada. El número pi (π), por ejemplo, que mide la relación entre la circunferencia de un círculo y su radio, tiene decimales infinitos, de los cuales se conocen varios millares. Existen los medios necesarios para calcular más si se tiene interés en hacerlo, pero, para fines prácticos, las seis primeras cifras, $\pi = 3.14159\ldots$, redondeado a 3.1416, son suficientes. Los decimales no calculados no solamente existen, sino que se pueden establecer algunas de sus propiedades. Se sabe, por ejemplo, que la sucesión de los decimales de π no es periódica, como lo es por ejemplo la sucesión de los decimales $1/7 = 0.142\,857\,142\,857\,142\,857\,1\ldots$ No se encontrará en la sucesión de los decimales de $\pi = 3.141\,592\,653\,5\ldots$

un ciclo que se repita de manera indefinida. Para el matemático, un número tiene una infinidad de decimales; para el físico, no tendría más que cuarenta.

Un sistema caótico es un *zoom*, análogo al que hemos utilizado para recorrer el Universo en 40 etapas: es un mecanismo de agrandamiento. El paso del tiempo revela detalles cada vez más finos, al igual que los clics sucesivos sobre la pantalla permiten penetrar más profundamente en la imagen.

Para conocer la trayectoria de un sistema determinista es suficiente conocer su posición inicial; a dos posiciones iniciales corresponderán dos trayectorias diferentes. Un sistema es caótico si amplifica, por poco que sea, las desviaciones iniciales: si al principio la distancia entre las dos trayectorias es d, se vuelve 10 d después de cierto tiempo T, característico del sistema. En otras palabras, si las posiciones iniciales distan d, las posiciones observadas después del tiempo T distarán 10 d, y estas desviaciones se amplifican según las reglas usuales del crecimiento exponencial: 100 d, 1 000 d, 1 000 000 d a lo largo de los tiempos 2 T, 3 T, 6 T. Hay tantos ceros como unidades de tiempo transcurridas: ahí está el efecto *zoom*.

A medida que el tiempo característico* del sistema se reduce, la rapidez con que se amplifica el sistema aumenta, y éste se tornará más caótico. Pero esta amplificación de las desviaciones no puede seguir indefinidamente. Si así fuera, después de 40 veces el tiempo característico, o sea, 40 T, ya habríamos recorrido nuestras cuarenta potencias de diez y nos encontraríamos fuera de los límites del universo. A partir de cierto momento, cuando las desviaciones han asumido suficiente talla, el fenómeno de amplificación cesa, el *zoom* ya no funciona. Dicho de otra manera, un sistema caótico amplifica desviaciones pequeñas, y solamente esas desviaciones pequeñas; permite que los fenómenos microscópicos adquieren dimensiones macroscópicas. Las grandes desviaciones engendrarán nuevas grandes desviaciones, como sería de esperar, pero sin amplificación particular.

El azar reside en la amplificación de las pequeñas desviaciones. Dos posiciones iniciales idénticas reproducirán la misma trayectoria: es un principio básico del determinismo. Por desgracia, es imposible volver a dar exactamente la misma posición a un sistema físico; siempre habrá una desviación, aunque sea del grosor de un átomo. Heráclito, cinco siglos antes de nuestra era, ya había observado que no se puede cruzar dos veces el mismo río. Quizás no haya llevado a sus últimas consecuencias tal observación: una desviación de un átomo, amplificada suficientes veces, puede volverse considerable. Nueve potencias de 10, nueve veces el tiempo característico de un sistema caótico, y la desviación llega a la medida de un metro. Así obtenemos fenómenos macroscópicos que se atribuirán al azar porque sus causas son imperceptibles.

Volvamos a nuestro primer ejemplo, el gimnasta articulado. Es un sistema caótico, y su tiempo característico es del orden de diez segundos. Si quiero que realice la misma trayectoria dos veces seguidas, debo reproducir la misma posición inicial. No puedo controlar la posición de cada grano de arena en el depósito. No obstante, es lo que se necesita hacer. Porque después de un minuto, la influencia de un solo grano de arena es un millón de veces mayor de lo que era al principio, equivalente a la de un montón de arena. Lo que al principio era solamente una desviación microscópica, se ha convertido rápidamente, por el mismo juego de amplificaciones sucesivas, en una desviación macroscópica: puesto que me es imposible observar la primera, me será imposible prever la segunda.

En este caso preciso, es incluso posible entender el mecanismo amplificador. En su movimiento, la rueda que arrastra al muñeco llega a posiciones de equilibrio, donde está igualmente cargada de uno y otro lado, y titubea antes de decidirse en qué sentido volver a girar. En este momento, el primer grano de arena que caiga del depósito o el primer grano de arena que salga del cubilete, romperá el equilibrio de un lado o del otro, y el movimiento, una vez desencadenado, se vuelve irreversible. Pero el hecho de que caiga un grano de arena un poco antes o después depende de una nadería, de alguna aspereza en la abertura, de la posición relativa de sus vecinos, todas ellas disposiciones microscópicas que son imposibles de ajustar de antemano, pero que pueden tener consecuencias macroscópicas.

Otro ejemplo muy conocido es el del dado. Una vez lanzado sobre un tapete verde, bajo las miradas expectantes de los jugadores que cuidan que nada influya ni se entrometa en su movimiento, su trayectoria está completamente determinada por las leyes de la mecánica. Pero se trata de un sistema caótico: una diferencia mínima en la manera de lanzarlo se amplificará a lo largo de sus rebotes, tanto que el resultado final es imprevisible. Por eso uno juega de preferencia con varios dados y los vuelve a lanzar si no han rodado lo suficiente: los adversarios saben bien que la presencia de varios dados hace que el sistema sea todavía más caótico y que sea preciso dar tiempo para que los efectos amplificadores actúen. La utilización de un cubilete tiene el mismo sentido: disminuir el control sobre la posición inicial, a fin de que no se pueda lanzar dos veces seguidas de la misma manera. El diablo sí sabe hacerlo, aun con seis dados en el cubilete, y más vale no jugar con él.

La teoría del caos estudia este tipo de mecanismos. Tiene dos aspectos. Uno de ellos se ocupa de reconocer la naturaleza del azar que se encuentra en ciertos fenómenos físicos, químicos, biológicos, económicos o sociales. ¿Provendrá el azar de un sistema caótico que es preciso identificar a continuación o de alguna otra fuente? El otro estudia sistemas existentes, que a menudo se han examinado por mucho tiempo, para determinar si puede haber en ellos un componente caótico que haya escapado a la atención de los observadores. Vamos a ilustrar uno y otro puntos de vista con la ayuda de dos ejemplos célebres: la mecánica celeste y la meteorología.

ASÍ EN LA TIERRA COMO EN EL CIELO

La mecánica celeste: Poincaré

Desde la más remota antigüedad, las estrellas fijas se distinguen de las estrellas móviles. La humanidad necesitó varios milenios para identificar a las estrellas móviles con planetas, que giran alrededor del Sol, junto con la Tierra, y determinar las leyes de su movimiento. Tal progreso ha sido impulsado por los más grandes nombres de la ciencia moderna. Copérnico, que pone al Sol, y no a la Tierra, en el centro del mundo. Kepler, que descubre que los planetas describen elipses en las que el Sol ocupa uno de los focos, y caracteriza completamente su velocidad de recorrido. Newton, que vuelve a unir todas las leyes descubiertas por Kepler en una sola, la ley de la gravitación universal: la materia atrae a la materia de forma directamente proporcional a la masa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. En otras palabras, si un cuerpo es dos veces más pesado, ejerce una fuerza de atracción dos veces más grande, y si está dos veces más lejos, la atracción es cuatro veces más débil. La fuerza de atracción que se ejerce sobre un cuerpo, realidad física, permite deducir la aceleración de su movimiento, concepto matemático, y calcular la totalidad de su trayectoria a partir de su posición y velocidad iniciales. Por lo tanto, en la física newtoniana, el conocimiento del estado actual del sistema solar nos debe permitir prever su evolución futura: hecho que constituye la introducción a la ciencia del concepto del determinismo, algo que ha hecho correr abundantemente la tinta hasta el día de hoy.

En su *Principia*, escrito en 1687, Newton demuestra cómo deducir las tres leyes de Kepler utilizando razonamientos puramente geométricos a partir de la atracción que el Sol ejerce sobre los planetas. Las órbitas elípticas, las velocidades de las trayectorias y los años planetarios aparecen de ahí en adelante como consecuencias comunes de esta ley sencilla, que Newton no fue el primero en enunciar (el mérito corresponde sin duda a Hooke en una carta a Newton fechada el 6 de enero de 1680), pero sí el único capaz de deducir sus consecuencias matemáticas. Todo el trabajo de sus sucesores consistirá en demostrar que esta única ley basta para explicar todos los movimientos de los astros, y que la teoría de Newton permite prever con exactitud todos los fenómenos celestes. Para ello dispondrán de un tesoro de observaciones acumuladas desde la antigüedad, transmitidas religiosamente por cada generación de astrónomos a la siguiente. De los caldeos a los griegos, después a los romanos y a los árabes, la filiación ha continuado, y la mirada del astrónomo moderno cuenta con más de dos milenios de observaciones. Consideremos, por ejemplo, que Tolomeo, en su *Almagesto*, en el siglo II de nuestra era, nos transmite observaciones caldeas que lo antecedían seis siglos. Puesto que, a la escala de la vida humana, los movimientos celestes son muy lentos (Saturno tarda 30 años en dar una vuelta al Sol, y el cometa Halley 75), para detectarlos es necesario poseer una mirada colectiva que pueda remontarse a tiempos muy remotos.

Se ve enseguida que las leyes de Kepler no son rigurosamente exactas, y que las observaciones antiguas están desfasadas respecto a sus predicciones. Entonces se propone la hipótesis de que la ley de Newton* es exacta y que la causa de las desigualdades observadas reside en que no se ha tomado en cuenta más que la atracción solar y se han omitido las atracciones que los planetas ejercen unos sobre otros. Después de todo, la masa de Júpiter es 1 / 1 000 de la masa del Sol, y puesto que está cinco veces más lejos de nosotros, ejerce sobre la Tierra una fuerza de atracción igual a 1 / 25 000 de la del Sol. Esas desviaciones son muy sensibles, sobre todo si se acumulan a lo largo de varios siglos, y la pregunta consiste entonces en saber si se pueden explicar de esa manera todas las desigualdades observadas.

La hipótesis iba a ser brillantemente confirmada durante los dos siglos siguientes, en que la historia de la astronomía es la de una marcha triunfal. Lalande y Clairaut calcularon que las perturbaciones causadas por Júpiter y Saturno retardarían un año y ocho meses el regreso del cometa Halley, cuya aparición anunciaron para mediados de abril de 1759, acertando con un mes de diferencia; el cometa apareció como lo habían previsto y pasó por el punto indicado el 12 de marzo. Adams, en 1845, y Le Verrier, en 1846, explican las desigualdades constatadas en la trayectoria de Urano desde su descubrimiento en 1781, atribuyéndolas a la presencia de un planeta desconocido, y calculan los elementos de su trayectoria. El 18 de septiembre de 1846, Le Verrier escribió a un astrónomo berlinés, Galle, para comunicarle las coordenadas del planeta. Al recibir la carta, Galle enfocó su telescopio a la constelación de Acuario, en el lugar indicado, y el día 25 le contestó a Le Verrier: "Señor, el planeta cuya posición nos habéis indicado existe realmente." Todos esos éxitos tuvieron resonancias inmensas en su época, como las que en la nuestra ha tenido la exploración del espacio, del primer Sputnik de 1957 a la misión Apolo de 1969, que permitió realizar uno de los más antiguos sueños de la humanidad. Por lo tanto, se trata de verificaciones experimentales de la ley de Newton, y se puede decir que hoy pocas leyes de la física han quedado tan bien confirmadas: ella y solamente ella regula los movimientos del sistema solar. El progreso de las ciencias ha obligado a modificarla ligeramente para tener en cuenta la teoría de la relatividad general (Einstein, 1915), pero dicha corrección relativista es muy ligera: su efecto más importante es una desigualdad de 42 segundos por siglo en el movimiento de Mercurio.

¿Será suficiente haber entendido el mecanismo para prever el comportamiento? La historia de la astronomía parece responder afirmativamente. Tenemos hoy a nuestra disposición efemérides que abarcan 44 siglos, es decir, conocemos de manera precisa las posiciones de los planetas y la Luna durante más de cuatro mil años; éstas pueden utilizarse, por ejemplo, para identificar los eclipses y fenómenos astronómicos que nos proporciona la antigüedad, y así precisar ciertas fechas históricas. Sería difícil encontrar irregularidad en el sistema solar o descubrir que el azar interviene en el movimiento de los planetas. Si se trata de predecir el futuro, una de las pocas cosas que podemos decir sin miedo a equivocarnos es que el Sol saldrá mañana, es decir, que la Tierra seguirá su trayectoria sobre su órbita, descubierta por Kepler.

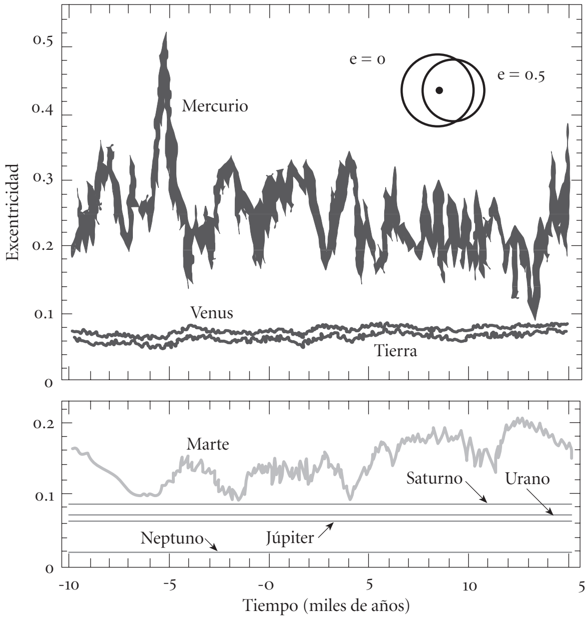
Nada de eso: todo aquello no es más que una ilusión, no óptica, sino de escala. Sabemos ahora que el sistema solar es caótico, pero su tiempo característico —recordemos que es el tiempo al final del cual una pequeña perturbación se multiplica por diez— es del orden de diez millones de años. Es muy largo en nuestra escala. Después de todo, hace diez millones de años seguíamos todavía en la era terciaria, y no había seres humanos sobre la Tierra. Sin embargo, es corto en la escala del sistema solar, que se formó hace más o menos cinco mil millones de años, o sea, 500 veces el tiempo característico, y probablemente le queden otros tantos por delante. Lo que la humanidad ha podido percibir durante su breve existencia es un instante de este largo lapso de tiempo, y no su desarrollo; una foto, y no una película. ¡Pensemos que desde su descubrimiento por Le Verrier hace 150 años, el planeta Neptuno no ha tenido tiempo ni siquiera para completar una revolución alrededor del Sol!

El carácter caótico del sistema solar está ligado a los nombres de dos de los más grandes matemáticos de este siglo: el francés Henri Poincaré (1854-1912) y el ruso André Kolmogorov (1903-1987). Uno tras otro se dedicaron a las ecuaciones de la mecánica celeste y los trabajos que de ahí resultaron forman la base de la teoría moderna de los sistemas dinámicos. Poincaré descubrió ciertas situaciones que necesariamente conducían a un movimiento caótico. Kolmogorov identifica otras que conducen a lo opuesto, un movimiento estable y perfectamente previsible: las trayectorias oscilan indefinidamente alrededor de ciertas posiciones medias, y las pequeñas perturbaciones no se amplifican en el transcurso del movimiento, lo cual permite hacer predicciones a muy largo plazo. La cuestión entonces consiste en saber si la verdad se encuentra en la situación descrita por Poincaré o en la que propone Kolmogorov.

La respuesta reside en un cálculo extremadamente largo y delicado, fuera del alcance de medios artesanales como el papel, el lápiz, la tabla de logaritmos y las calculadoras mecánicas. Para Laplace y para Le Verrier, con todo su genio y su gran paciencia, el límite extremo de previsibilidad es del orden de un millón de años. Además, se puede hablar de una previsibilidad bastante vulgar, referida a los elementos principales de las órbitas: si se trata de calcular las posiciones precisas de los planetas, el horizonte está mucho más cerca, ya que las mejores efemérides disponibles hoy solamente cubren 44 siglos. Ahora bien, sabemos actualmente que las inestabilidades solamente aparecen en una escala de tiempo mucho mayor, del orden de cien millones de años. Ha sido preciso esperar los progresos recientes de las técnicas numéricas y del material informático para que se pueda por fin seguir al sistema solar con cierta precisión en intervalos de tiempo de ese orden.

Para entender los resultados de dichas simulaciones, es bueno tener presente la estructura del sistema solar. Según nuestra escala del tiempo, los planetas describen elipses, en las que el Sol ocupa uno de los focos. Dichas elipses están situadas más o menos en el mismo plano, y los planetas describen sus órbitas en el mismo sentido. Son nueve: los planetas interiores (Mercurio, Venus, la Tierra, Marte) y los exteriores (Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno, Plutón). Plutón desempeña un papel particular por tener una masa muy débil, lo cual lo convierte probablemente en un antiguo satélite de Neptuno, y no tiene ninguna influencia sobre el resto del sistema. Júpiter es, por mucho, el planeta más grande, seguido por los demás planetas exteriores (con la excepción de Plutón). Entre Marte y Júpiter, no hay planetas sino un cinturón de asteroides, constituido por una miríada de fragmentos de todos los tamaños que gravitan alrededor del Sol.

En 1988, G. J. Sussman y J. Wisdom, del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), siguieron numéricamente a los planetas exteriores durante 875 años, gracias a un supercalculador concebido para estos fines, y demostraron que el movimiento de Plutón es caótico, con un tiempo característico del orden de 50 millones de años. En 1989, Jacques Laskar, del Bureau des Longitudes, siguió al sistema solar du-

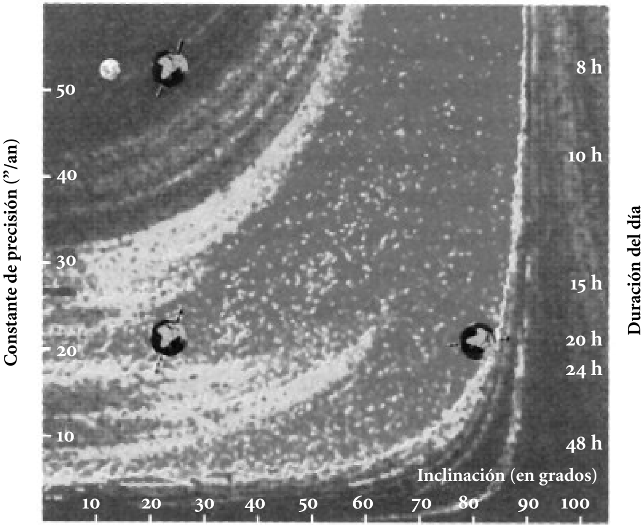


Deformación de las órbitas. *Estas figuras muestran cómo se deforman las órbitas de los planetas en función del tiempo. El eje de abscisas (abajo) representa el tiempo, de diez mil millones de años en el pasado a quince mil millones en el futuro; el de ordenadas (a la izquierda), la excentricidad: lo más próximo que se esté a 0, más cerca estará la órbita de un círculo perfecto. Arriba a la derecha se representan los casos extremos, e = 0 (círculo perfecto) y e = 0.5 (elipse). Se ve que las órbitas de los planetas exteriores (excepto Plutón) son casi circulares, y que las órbitas de Marte, y sobre todo de Mercurio, sufren variaciones importantes.*

rante 200 millones de años, y demostró que el movimiento de los planetas interiores (que incluye el nuestro) es caótico, con un tiempo característico del orden de diez millones de años. Una imprecisión de un centímetro en la posición de estos planetas se vuelve una imprecisión de un millón de kilómetros al final de 200 millones de años, lo que obviamente no permite ninguna previsión en esta escala de tiempo. El azar entra aquí porque nuestras medidas no pueden distinguir posiciones ni velocidades iniciales, además, con trayectorias muy diferentes.

Por lo tanto, se pueden identificar las diversas posibilidades y evaluar sus probabilidades respectivas, reproduciendo el experimento: tomaremos varios puntos de partida, suficientemente cercanos para no distinguirlos físicamente, y calcularemos las trayectorias correspondientes. Eso fue lo que realizó Laskar en 1994 y llegó a las siguientes conclusiones. Las órbitas de los planetas grandes exteriores, de Júpiter a Neptuno, son estables: no experimentan cambios notables durante mil millones de años. Los movimientos de Marte y la Tierra son caóticos, pero están confinados a bandas separadas. Así que no parece haber posibilidad de colisión entre la Tierra y Marte, y tampoco entre la Tierra y Venus. Empero, dichos planetas se pueden acercar (o distanciar) mucho más de lo que están ahora. Venus ha intrigado mucho a los astrónomos, porque no gira sobre sí mismo (rotación propia) en el mismo sentido que los demás planetas: en Venus, si uno se orienta por la estrella Polar, el Sol se levanta en el oeste y se pone en el este. Laskar descubrió que el caos en el movimiento de Venus es perfectamente capaz de voltear al planeta, y que lo ha hecho varias veces desde que existe el sistema solar. Por ende, es posible que hoy Venus se ponga de cabeza con respecto a su posición inicial. Mercurio es el planeta más cercano al Sol y el que tiene el movimiento más caótico. La inestabilidad de su órbita podría llegar a alejarlo un poco más que Venus. Así que una colisión con este planeta es una posibilidad, como lo es también su eyección del sistema solar. Laskar incluso pudo “empujar a Mercurio hacia la salida", imprimiéndole de vez en cuando pequeños y juiciosos empujones con el pulgar.

Ya no diremos más sobre este modelo, cuyo poder explicativo es evidentemente considerable. Se puede jugar a *qué*



La Tierra sin la Luna. *Esta figura muestra cómo sería la inestabilidad del movimiento de la Tierra en ausencia de su satélite. Cada punto de la figura corresponde a una posición de la Tierra con relación al Sol: el eje de las ordenadas (a la derecha) indica la duración del día, de 8 a 48 h, es decir, la velocidad de rotación de la Tierra; en el de abscisas (abajo) se indica la oblicuidad, es decir la inclinación del eje de la Tierra sobre su órbita alrededor del Sol. La zona roja es la zona caótica: a toda posición inicial situada dentro de esta zona le corresponde todo el segmento horizontal (o al menos, el segmento situado en la zona roja). Si la Luna fuera a desaparecer hoy, la Tierra se encontraría sola en la posición indicada abajo a la izquierda (24h, 23º), en la zona roja, y su movimiento la llevaría ineluctablemente hasta la otra extremidad del segmento horizontal, es decir, al punto situado abajo a la derecha (24h, 85º). En dicha posición, la Tierra se habría acostado completamente sobre su órbita.*

hubiera pasado si acaso…, y a *qué pasaría si acaso…* Haciéndolo, tenemos la satisfacción de aprender que, si la Luna no existiera, la inclinación de la Tierra en su órbita (es decir, la latitud de los trópicos), que actualmente es de 23 grados, se tornaría considerablemente caótica y podría pasar de 60 a cero grados (la Tierra se volvería a encontrar completamente acostada sobre su órbita) en dos millones de años, con las consecuencias climáticas que podemos imaginar. También descubrimos que el sistema solar está lleno, en el sentido de que la introducción en cualquier sitio de otro planeta provocaría una enorme inestabilidad, que conduciría en poco tiempo (a escala astronómica, por supuesto) a una colisión o a una eyección.

No quisiera terminar dejando la impresión de que los grandes problemas de la mecánica celeste no fueron resueltos hasta el siglo XX, ni que los astrónomos de siglos anteriores no hicieran gran cosa. Al contrario, si se ha logrado identificar un componente caótico en el movimiento del sistema solar, es porque ya se habían aislado todos los demás componentes. Detengámonos un instante en dicha historia, pues es aleccionadora.

La trayectoria de un planeta como la Tierra resulta de la suma de varios movimientos que se llevan a cabo a escalas de tiempo diferentes. Partimos de un movimiento kepleriano, resultado de la atracción solar. Si el sistema solar no contuviera ningún otro planeta más que la Tierra, ésta recorrería indefinidamente la misma órbita elíptica, de acuerdo con las tres leyes de Kepler, que serían, entonces, rigurosamente exactas, y su inclinación —es decir, el ángulo que forma su eje de rotación con el plano de la órbita— sería también constante. La escala de tiempo en este caso es de un año, el tiempo que tarda la Tierra en describir su órbita. Agreguemos a continuación al movimiento kepleriano movimientos periódicos, que resultan de la atracción de los otros planetas y de la Luna. A la escala de un año, el movimiento no se modifica, ya que se lleva a cabo siguiendo una elipse kepleriana. Pero, a mayor escala, que va de un siglo a un millón de años, se modifica la forma de dicha elipse, así como la inclinación de la Tierra. Es un poco como si la Tierra rodara sobre rieles que se desplazan. Esta deformación lenta de la órbita, que viene a sobreponerse al movimiento propio del planeta, ha sido objeto de toda la atención de los astrónomos desde Newton, porque permite darse cuenta de las desigualdades observadas entre las predicciones de la teoría kepleriana exclusivamente y las observaciones acumuladas desde hace siglos. Es así que Laplace, por ejemplo, entre 1785 y 1788, descubre un término debido a la atracción mutua de los dos planetas en las ecuaciones del movimiento de Júpiter y Saturno, con un periodo de más o menos 900 años, lo cual le permitió poner en perfecto acuerdo las predicciones teóricas con las observaciones (oposición de Júpiter y Saturno) desde 240 a.C. hasta 1715, o sea, casi dos mil años.

¿Habrá un tercer tipo de movimiento que venga a sobreponerse a los otros dos y cuya influencia se haga sentir a una escala todavía mayor, del orden de cien millones de años? Los métodos matemáticos utilizados por Laplace o Le Verrier no les permitían contestar esta pregunta. Solamente fueron capaces de descubrir —de manera muy ingeniosa, por cierto— movimientos periódicos o desviaciones constantes. En efecto, una de las principales aportaciones de esta teoría es que no hay una desviación constante que, por ejemplo, lleve a la Tierra lenta pero seguramente, a distanciarse del Sol o a acercarse a él, con las consecuencias que podemos imaginar. No, a esta escala de tiempo, que llega, valga la repetición, hasta un millón de años, las únicas desviaciones posibles de la órbita son periódicas, es decir, que a lo largo de un tiempo más o menos largo, la Tierra vuelve a pasar por las mismas posiciones.

Hoy en día sabemos que efectivamente existe ese movimiento del tercer tipo. El sistema solar es estable y regular a la escala de un millón de años; a la escala de cien millones de años, es caótico. Gracias a los adelantos matemáticos de Poincaré y de Kolmogorov, y gracias a los progresos en las técnicas de cálculo, podemos extender nuestra mirada mucho más lejos que Laplace o Le Verrier. Sin embargo, conforme a las palabras de Pascal, gracias a ellos podemos ver más lejos, como enanos trepados en los hombros de gigantes. El caos del sistema solar no es más que una deducción a partir de los movimientos periódicos que ellos identificaron y clasificaron con mucho cuidado, y los cálculos sofisticados que lo demuestran incorporan los que ellos hicieron hace uno o dos siglos. Laskar, por ejemplo, quería seguir los planetas a lo largo de varios miles de millones de años, y empezó por utilizar las técnicas matemáticas desarrolladas por Laplace, Le Verrier y Poincaré para simplificar su problema; regresó a un planteamiento dentro de un sistema de ecuaciones que llevaran *nada más* 150 mil términos, y que pudo resolver en unas horas con la ayuda de un supercalculador.

En los últimos cuatro siglos, el progreso ha sido inmenso y continuo. Es fascinante ver cómo nuestra percepción del mundo ha evolucionado durante dicho periodo, cómo la filosofía y la cultura poco a poco han asimilado los progresos de la ciencia, o sea, que las relaciones entre una sociedad y su saber no van en un solo sentido. Al anunciar que las trayectorias de los planetas son elipses, Kepler impone la imagen de un universo simple y estable, transparente a nuestros ojos desde el origen de los tiempos hasta el fin del mundo. Newton y todos sus sucesores hasta Einstein, buscan confirmar esta imagen, y cada vez encuentran mayores problemas de medición al afinar sus medidas: es difícil pintar un cuadro acabado a partir del boceto creado por Kepler, y al definir los detalles el trabajo se hace más pesado. La imagen del Universo que nos da la mecánica clásica es la de un reloj cuyo movimiento se desajusta poco a poco, y el mismo Newton pensaba que el relojero debía intervenir de vez en cuando para ponerlo a la hora. La situación cambia con Poincaré y Kolmogorov: los matemáticos aceptan que el caos forma parte integrante de la mecánica celeste, y que el sistema solar puede ser inestable. Desde los primeros trabajos de Poincaré sobre el tema ha transcurrido un siglo, y 50 años han pasado desde los de Kolmogorov. Ese tiempo ha hecho falta para que la nueva concepción del mundo se extienda más allá de algunos restringidos círculos científicos, y quizás haga falta esperar otro tanto para que se vuelva tan popular como lo es hoy la visión kepleriana.

La meteorología: Lorenz

Volvamos a nuestro planeta. Aquí la situación que encontramos es mucho más complicada. El sistema solar resulta muy simple, contiene pocos objetos (el Sol y los planetas) y está regido por una sola ley: la gravitación. Claro que podemos refinar más nuestro modelo al introducir otros objetos (satélites, asteroides, cometas, polvo) y otros modos de interacción (radiación, impactos), pero la imagen fundamental es la que acabamos de describir. La Tierra, en cambio, es un sistema muy complejo, en el que los fenómenos físicos, químicos, biológicos y sociales no pueden disociarse.

No hay mejor ejemplo que la meteorología. El clima parece depender de un número inmenso de factores. Para preverlo con cinco días de anticipación en Francia, es necesario conocer las condiciones meteorológicas que prevalecen hoy en Nueva Zelandia. Tenemos en cuenta la temperatura, la presión, la higrometría, el Sol, la altitud en todos los puntos del globo, la radiación solar y, por supuesto, la capa de ozono, la orografía y los océanos, cuyo estado en la superficie y en las profundidades permanece todavía cubierto de misterio. Todas esas variables están ligadas por relaciones físicas, que se traducen en ecuaciones matemáticas: la ley de Mariotte*, que relaciona la presión, la temperatura y la masa volumétrica del aire; las ecuaciones de Navier-Stokes*, que registran las corrientes de los fluidos compresibles (como el aire) o no compresibles (como el agua), entre otros. No es sorprendente que nos cueste trabajo manejar toda esa información ni que los meteorólogos necesiten computadoras capaces de efectuar billones de operaciones por segundo.

Sin embargo, sería erróneo atribuir nuestra dificultad para pronosticar el clima exclusivamente a la multiplicidad de variables y a la complejidad de las ecuaciones. En un experimento célebre, el meteorólogo Edward Lorenz logró construir un modelo muy reducido, que no dependía más que de doce factores y era igual de imprevisible que el modelo completo.

No vamos a describir el modelo de Lorenz. Nos limitaremos a decir que del abundante acervo de variables meteorológicas se quedó con doce que le parecieron significativas, y definió su evolución por medio de doce ecuaciones simples, que reflejaban muy someramente determinadas características principales del sistema completo. El modelo era demasiado reducido para servir de predictor climático, pero tenía la ventaja de ahorrar tiempo de cálculo —estamos en 1960—, lo cual lo hacía susceptible de simulaciones numéricas al variar las condiciones iniciales (es decir, valores al inicio de las doce variables retenidas) para obtener a voluntad una serie de *climas* diferentes y así disponer de un tipo de meteorología experimental. La otra ventaja consistía en que podía acelerarse el curso del tiempo. Minuto a minuto, la computadora escupía una lista de doce números que, vistos por ojos expertos, resumía el clima de un día; en suma, un informe meteorológico. Después de seis horas, si la computadora no sufría una descompostura, se obtenía el informe meteorológico de un año entero.

La primera satisfacción de Lorenz fue constatar que su modelo, aunque reducido, era plausible: su informe meteorológico artificial se parecía mucho al informe natural. Al igual que este último, se regía por el ballet de los ciclones y los anticiclones; se veían nacer y morir las perturbaciones mientras los frentes surgían y se desplazaban. Pero sobre todo, el oficio del meteorólogo no resultaba más fácil en el mundo artificial de Lorenz que en la realidad. Tanto en uno como en otro, el clima se alteraba, los años se sucedían sin parecerse, y con la excepción de un par de días, se desmentían todas las predicciones.

Por sí sola, esa información debiera inquietarnos. En el caso de la meteorología, el azar no está ligado a la multiplicidad de los factores ni a la diversidad de las causas, ya que después de una reducción tan drástica del número de variables, el clima permanece imprevisible. Mejor aún: las mismas condiciones iniciales dan lugar a evoluciones completamente diferentes. En todo caso, ésa fue la experiencia de Lorenz cuando, al querer seguir un día una serie de observaciones que había interrumpido la noche anterior, para no volver a empezar desde el principio, decidió retomarlas a partir de la mitad. Por ende, volvió a copiar el estado del sistema hasta la mitad del camino, es decir, los doce números que daba la lista en ese momento del cálculo, y los volvió a inyectar a la computadora como estado inicial de una nueva evolución.

Claro que esperaba ver otra vez la segunda mitad del mismo proceso hasta llegar al momento en que se había detenido el primer cálculo para prolongarse en el segundo, que daría los resultados ya obtenidos.

Para su gran sorpresa, el segundo cálculo, lejos de reproducir los resultados del primero, no tardó en apartarse de ellos. Al principio, los resultados eran parecidos, pero iban divergiendo progresivamente y, al cabo del equivalente a un mes, las dos evoluciones ya no tenían nada en común. Es como si Dios se hubiera empeñado en crear dos planetas idénticos, las mismas mariposas revoloteando en los mismos lugares y las mismas hojas cayendo de los mismos árboles bajo el soplo de los mismos vientos, y que al regresar un mes después de la Creación a visitarlos, viera que en uno llovía y en el otro hacía sol. De manera más prosaica, el resultado de un cálculo no debería depender de la persona que lo hace ni del momento en que lo hace. Empero, el modelo de Lorenz simula la evolución por medio del cálculo: el clima de hoy se calcula a partir del tiempo que hizo ayer. Si reproducimos el clima de ayer de manera rigurosa, como lo hizo Lorenz al introducir en la máquina los doce números que lo representaban, se tendría que volver a encontrar exactamente el clima de hoy, y el tiempo de mañana y el del día siguiente. Pero la computadora no hacía eso: todo sucedía como si las matemáticas hubieran cambiado durante la noche.

El genio de Lorenz reside en que supo reconocer un sistema caótico en acción en una época en que ese término ni siquiera estaba acuñado. Recordó que las computadoras no eran matemáticos, y que no guardaban todos los decimales de los números con los cuales trabajaba. Por razones de espacio en la memoria y para limitar la complejidad de las operaciones, las computadoras se ven forzadas a redondear los números, y trabajan sólo con una cantidad determinada de números establecidos *a priori* a partir de las cifras significativas (es decir, sin contar los ceros). La máquina que utilizaba Lorenz guardaba seis, es decir, para ella, $\pi = 3.14159$. En cambio, para economizar lugar, solamente imprimía tres, o sea, que el valor que se leía en la lista era $\pi = 3.14$. Así, los datos que Lorenz había vuelto a copiar y que habían servido como base para el segundo cálculo no eran exactamente los que la computadora guardaba en la memoria en ese momento y que había utilizado para el primero. La diferencia no era muy grande, ya que no empezaba a notarse hasta la cuarta cifra significativa, o sea, un error inferior a un milésimo. Pero es suficiente para que el mecanismo amplificador tenga campo de acción y, transcurrido cierto tiempo, provoque desviaciones considerables.

Actualmente se reconoce que la meteorología es un sistema caótico, y que ésa es la razón principal por la cual las predicciones a largo plazo resultan imposibles. Consideremos que una pequeña perturbación se duplica en dos días, lo cual significa que en diez días se verá amplificada por un factor de 1 000, y por mil millones en un mes, cuando llega a la escala macroscópica. Esto es lo que llamamos el efecto mariposa: el batir del ala de una mariposa en una pradera de la montaña se convertirá en una corriente de aire, que no tardará en volverse una brisa, que a su vez dará origen a un ciclón que hundirá un barco en el golfo de México. De esto tendríamos que concluir que, para hacer previsiones meteorológicas que abarquen uno o dos meses, haría falta conocer todos los batidos de las alas de todas las mariposas del planeta. La hipótesis no es del todo exacta: el modelo de Lorenz, que no tenía más que doce variables, ya presenta la misma inestabilidad. Sería justo decir que de la miríada de mariposas que vuelan sobre los prados y en los bosques, una sola es importante, y que incluso podemos saber cuál es. Pero habría que conocer su posición exacta y el batido de sus alas con una precisión tan poco realista que pierde significado físico.

Para entender bien estos matices, lo mejor es citar aquí un fragmento de una obra que data de hace un siglo: *Science et Méthode*, del gran matemático Henri Poincaré, a quien volveremos a encontrar más adelante: "¿Por qué es tan difícil para los meteorólogos prever el clima con alguna certidumbre? ¿Por qué las precipitaciones de lluvia, y aun las mismas tempestades, parecen llegarnos por azar, de tal manera que mucha gente encuentra natural rezar para que llueva o para que haga Sol, aunque les parecería ridículo pedir un eclipse por medio de la oración? Vemos que las grandes perturbaciones se producen en general en regiones cuya atmósfera está en equilibrio inestable. Los meteorólogos ven que dicho equilibrio es inestable, que un ciclón nacerá en algún sitio, pero no están en condiciones de decir dónde; un décimo de grado más o menos en un punto cualquiera, y el ciclón explotará aquí y no allá, y extenderá desolación en comarcas que habría evitado. Si se hubiera conocido ese décimo de grado, se podría saberlo de antemano, pero las observaciones no son lo bastante precisas ni ajustadas, y por eso todo parece causado por la intervención del azar. Aquí de nuevo encontramos el mismo contraste entre una causa mínima, imperceptible para el observador, y efectos considerables que a veces asumen proporciones de desastres espantosos."

¿Qué conclusión podemos sacar de ese texto? Para empezar, por cierto, que se trata de una época en que los matemáticos sí sabían escribir, y que Poincaré era un genio muy adelantado para sus tiempos. No estoy seguro de que los meteorólogos coetáneos suyos hayan compartido sus ideas. Desde este punto de vista, la aparición de las computadoras ha sido una ventaja inapreciable, al permitir multiplicar los experimentos numéricos (lo que se llama simulaciones) que ponen a nuestro alcance la realidad de los sistemas caóticos sin más esfuerzo que apretar una tecla con el dedo, algo que en tiempos de Poincaré era inaccesible para cualquier esfuerzo de cálculo. Hubiéramos podido enseñarle algo, sin embargo: que la inestabilidad de la que él habla, y que es efectivamente la razón por la cual no se pueden hacer predicciones a largo plazo, no se distribuye de manera uniforme sobre todas las variables que intervienen en la meteorología. El sistema completo contiene subsistemas mucho más simples, con doce variables (pronto veremos que pueden reducirse aun a tres), que presentan la misma inestabilidad.

Eso abre posibilidades que Poincaré —tal vez— no había considerado. Es cierto que la especificación completa del estado de la atmósfera terrestre en un momento dado requiere precisar el valor de un número considerable de variables. Sin embargo, no todas son independientes, o al menos, si lo son, no permanecerán así mucho tiempo. No es realista, por ejemplo, suponer que en dos puntos distantes un kilómetro la diferencia de presión atmosférica al nivel del suelo sea mayor de cien milibares, o que la diferencia de temperatura sea de diez grados. Si por razones extraordinarias se produjera esa diferencia, podemos estar seguros de que la situación evolucionará rápidamente hacia un estado normal; la circulación del aire se encargará de restablecer localmente el equilibrio. Así pues, la evolución normal del sistema crea lazos entre las diferentes variables que lo describen, y en consecuencia, reduce el número de variables verdaderamente independientes. Puesto que para describir un estado cualquiera de la atmósfera, que implique por ejemplo una nevada sobre Bamako, África, y que en Terre Adelía en la Antártida la temperatura sea de 30 grados a la sombra, habría que especificar los valores de cien mil, un millón o diez millones de variables, pero se necesitarían muchas menos para describir un estado real, que la atmósfera es susceptible de alcanzar por sí sola. Lorenz bajó a doce, pero no buscaba una representación fiel de la circulación atmosférica; solamente quería construir un modelo reducido. Ciertamente hay que conservar más variables si se quiere un modelo realista, quizás cien, quizás mil. Poco importa el número exacto: lo esencial es saber que la evolución natural del sistema se da hacia estados muy particulares, cuya descripción completa requiere infinitamente menos variables que la de estados por completo arbitrarios, que, por lo tanto, no son realizables físicamente salvo de manera transitoria.

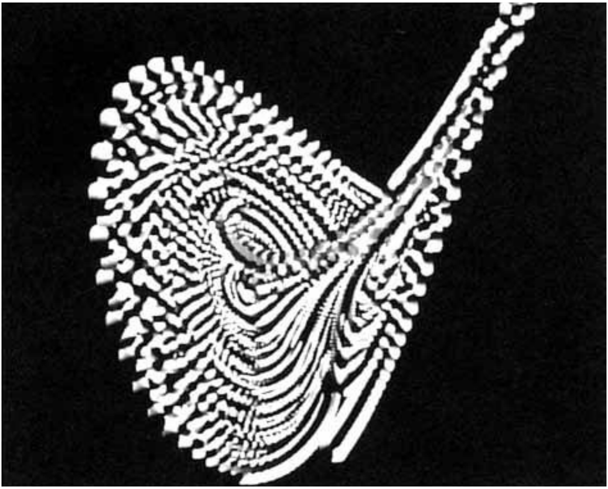
El otro modelo, que muestra mejor el mecanismo de reducción del número de variables, fue también creado por Lorenz. Se trata de un nuevo sistema de tres variables regido por tres ecuaciones diferenciales, cuya belleza exótica ha fascinado a todos los investigadores desde su publicación en 1963, aunque dicho sistema ya no tiene mucho que ver con la meteorología. El objeto de dos asas presentado en la p. 49 es un *atractor extraño*. El mismo sistema, o mejor dicho, su estado en un momento dado, se representa por medio de un punto en el espacio de tres dimensiones: las tres coordenadas de dicho punto representan los valores de las tres variables descriptivas en el instante considerado. Una vez escogido el punto inicial, la evolución del sistema está enteramente determinada por las ecuaciones de Lorenz, y el dibujo representa la trayectoria correspondiente. Observamos que ésta se enrolla alternativamente en torno de un asa y después de otra, para volver a enrollarse en la primera, y enseguida en la segunda, y así indefinidamente, y de manera aleatoria, sin que pueda jamás preverse el momento en que la trayectoria basculará de un lado o del otro.

Aquí surge la analogía con el movimiento de la rueda, el molino bajo la lluvia de arena, esta vez con la ventaja que disponemos de un modelo matemático simple. Hemos hecho hincapié en la importancia de las situaciones de equilibrio, donde la rueda, inmóvil, que está más o menos cargada de manera igual por una parte y otra, titubea como para saber de qué lado inclinarse. Aquí se siente el efecto del azar, porque en tal estado de equilibrio, sólo un grano de arena sería suficiente para inclinar el movimiento de un lado u otro. Volvemos a encontrar esta situación en el atractor de Lorenz: la zona de la mediana, donde se cruzan las dos asas, es una encrucijada en la que se bifurcan visiblemente varios caminos, unos dirigidos a la izquierda, otros a la derecha. Estos caminos se entretejen muy íntimamente y forman una red tan inextricable, que una diferencia mínima al llegar a esta zona, haría que se tomara un camino determinado en vez de otro, orientado hacia la izquierda en vez de la derecha.

El hecho de que el modelo de Lorenz no necesite más que tres variables explicativas permite visualizar el funcionamiento de un sistema caótico representado por la trayectoria de un punto en el espacio en tres dimensiones. Aquí, otra vez, las posibilidades de cálculo y de representación gráfica proporcionadas por las computadoras modernas colocan dicho experimento al alcance de todos, y es ciertamente uno de los espectáculos más fascinantes que ofrecen las matemáticas. Se cargan las ecuaciones del movimiento en la máquina, se establece el punto de partida, ¡y a rodar!: a partir de este único punto se genera una trayectoria que, por los hilos de sus volutas, dibuja en el espacio inicialmente vacío un objeto de dos asas que no se parece a nada conocido, completamente extraño a las figuras clásicas de la geometría en el espacio, el plano, el cubo o la esfera, objetos planos y lisos, mientras que éste parece hecho de lagunas y ángulos, como si fuera extraño a nuestro espacio de tres dimensiones y le costara trabajo habitarlo.

Nos estamos anticipando un poco, porque la particular estructura del atractor extraño de Lorenz y su geometría extraterrestre no se revelan a primera vista ni a la reflexión inicial; no hemos terminado de usar la computadora. Empezamos por cambiar la posición inicial; no importa que el nuevo punto de partida se ubique lejos o cerca del antiguo, de cualquier manera se obtiene una trayectoria completamente diferente, porque el sistema es caótico. Rápidamente, las dos trayectorias se desconectan y evolucionan independientemente la una de la otra; una se encontrará en la parte izquierda del espacio y la otra andará por la derecha, y se volverán a reunir brevemente antes de volver a separarse. Sin embargo, a lo largo de su movimiento, pasan más o menos por los mismos lugares, aunque en momentos muy distintos. Cada trayectoria talla a su manera este objeto extraño de dos asas en el ambiente del espacio, como si dos escultores cincelaran de dos bloques de mármol diferentes el mismo David juvenil, con la honda sobre el hombro.

Por eso, al objeto límite, que es el que aparecería si dejáramos que los cinceles de los escultores invisibles terminaran su trabajo, se le llama *atractor*: atrae todas las trayectorias no importa de dónde partan. De cualquier punto que partan, las trayectorias se dirigirán sin falta hacia dicha región estrecha del espacio que contiene al atractor y a sus evoluciones, y ahí se quedarán confinadas. Aquí se aprecia bien la diferencia entre un estado arbitrario del sistema y un estado realista, lo cual ya habíamos intentado que se percibiera respecto a la meteorología. Ya que cada punto del espacio de tres dimensiones representa un estado teóricamente posible, solamente algunos estados son naturales, en el sentido de que la evolución natural del sistema puede conducir a ellos. Dichos estados naturales ocupan una parte mucho más limitada del espacio, representada por el atractor de Lorenz.



El atractor de Lorenz. *Observamos la forma de silla de montar, característica del atractor de Lorenz, que está hecha de dos hojas, una a la izquierda y la otra a la derecha. La estructura perlada de cada una de ellas es un intento de la computadora por hacer la estructura hojaldrada muy detallada, las "mil hojas lagunosas" que hemos intentado describir. Un movimiento cualquiera partirá de la hoja a la izquierda y dará varias vueltas ahí antes de pasar a la hoja de la derecha, y entonces regresará, oscilando así perpetuamente de una hoja a otra. Foto.© J.-F. Colonna / GSV-Lactanne (CNET, École polytechnique).*

Todos los demás estados son transitorios, en el sentido de que si se lleva al sistema a uno de ellos, en cuanto el sistema se libere y retome su curso normal se alejará inmediatamente para nunca más volver. Conforme a un régimen de crucero, el sistema se encontrará necesariamente en alguna parte del atractor, es decir, en estado natural. No está inmóvil, al contrario: continúa indefinidamente su movimiento giratorio, unas vueltas a la izquierda, y luego unas vueltas a la derecha, movimiento que lo lleva a explorar sistemáticamente todo el atractor, es decir, a visitar todos los estados naturales. La existencia del atractor representa una distinción fundamental que opera en la gran mayoría de las situaciones, por las cuales el sistema no pasaría jamás por sí solo, así como las pocas situaciones naturales, que el sistema repasará indefinidamente, aunque de manera irregular.

He aquí lo que hubiéramos podido enseñarle a Poincaré: el juego del azar y de la necesidad. De donde sea que partan, las trayectorias acaban sin remedio en el atractor y ya no lo dejan. De todo el espacio puesto a su disposición, el movimiento no explora más que una ínfima parte, siempre la misma. Así que el atractor de Lorenz es como una cristalización de la necesidad, una representación geométrica de ésta. Pero una vez llegado a dicho estado, el sistema recuerda que es caótico, y el azar toma las riendas. Las trayectorias permanecen confinadas al atractor, pero el mecanismo de amplificación de pequeñas desviaciones entra en acción, y el movimiento se vuelve aleatorio, por las vías que ya hemos descrito. Las trayectorias se separan rápidamente una de otra, aun si sus puntos de partida están cercanos. Alternan con evoluciones a la izquierda y la derecha, sobre un asa y la otra de manera irregular e imprevisible, siendo la única regla de sucesión que no hay regla. Cada trayectoria explora la totalidad del espacio puesto a su disposición, es decir, la superficie del atractor, y sus meandros la conducen al final a pasar indefinidamente por todas partes. Al considerar cualquier punto del atractor, podemos estar seguros de que por ahí pasará cada trayectoria, cada una en su momento, dependiendo de su punto de partida, no solamente una vez, sino dos y tres, indefinidamente, siempre de manera irregular, pero ciertamente siempre.

También hubiéramos podido enseñarle a Poincaré la estructura del atractor de Lorenz. Otra vez, la computadora nos es imprescindible. El atractor es un objeto límite, que trazará cada una de las trayectorias, poco importa la que sea, si se deja a la máquina funcionar indefinidamente. Lo que vemos en la pantalla no es más que un boceto, que se hará más fino si dejamos a la máquina proseguir con su trabajo durante mucho tiempo. Este boceto representa un estado intermedio más próximo al resultado final cuanto más largo sea el camino recorrido por la trayectoria. Sin mayor dificultad, es posible agrandar este u otro detalle, así como hacer cortes transversales del atractor; basta con esperar a que la trayectoria pase por el dominio que nos interesa o que atraviese el corte del plano que hemos elegido. Es simplemente una cuestión de tiempo (cuanto más pequeña sea la región escogida, más tardará la trayectoria en regresar), pero con las computadoras de que hoy disponemos, todo resulta fácil. Así es que se pueden multiplicar a placer las disecciones para explorar la anatomía del atractor.

Su homogeneidad es sorprendente. El atractor tiene una estructura hojaldrada, idéntica a sí misma en cualquier escala. Para comprenderla, tomemos un libro grueso, de mil páginas, por ejemplo, e imaginemos que le quitamos todas las hojas cuyo número de página no se escriba únicamente con dígitos impares: 1, 3, 5, 7 ó 9. Así que dejamos la página 713 y quitamos las páginas 613, 723 y 714. Nos cuidamos de no tocar la encuadernación, así que cada página faltante deja un espacio vacío.

El objeto mutilado que nos queda entre manos es extraño. Tiene cierto número de páginas (155, si no hay ningún error de mi parte), repartidas de manera irregular: de la 711 a la 719 queda un fajo de cinco páginas consecutivas, mientras que entre la 719 y la 731 hay una laguna de once páginas, y después de la 199 aparece un vacío de 111 páginas antes de la 311. El resultado es un objeto entre un libro y una página, y no es ni lo uno ni lo otro: no es un libro porque tiene demasiadas lagunas, y tampoco es una página porque son demasiadas. Se puede decir que es un pseudolibro.

Prosigamos con la obra destruida. Imaginemos que el libro es más gordo, o, más bien, imaginémoslo tan grueso como al principio, pero con páginas más delgadas, así que donde antes había mil hojas, ahora hay diez mil. Volvamos a arrancar las páginas siguiendo el mismo principio. Lo que acabamos de hacer es lo mismo que hace la trayectoria con cada vuelta que da, trae nuevas precisiones, afina la imagen anterior y despeja un poco más el atractor de Lorenz. Respecto a la imagen anterior, el de mil hojas que ocupa el mismo volumen, han sucedido algunos cambios. Quedan ahora 830 páginas de diez mil, donde antes quedaban 155 de mil. Eso ciertamente nos da más páginas, así como más detalles, y el pseudolibro se desvía decididamente tanto del libro completo como de la simple página. Sin embargo, el volumen que se ocupa en el espacio es menor: la proporción ha caído de 155/1 000, o sea 15.5%, a 830/10 000, o sea 8.3%. Cada una de las páginas antiguas se descompone en diez páginas nuevas. La ubicación de la página 711 (estilo antiguo) estará ocupada de aquí en adelante por las diez páginas numeradas de 7110 a 7119 (nuevo estilo). Esta mayor precisión crea nuevas lagunas: ahí donde se discernía un lleno, la página 711, veo ahora un pliego de cinco páginas, 7111, 7113, 7115, 7117 y 7119, separadas por cuatro lagunas. La precisión hace que aparezcan nuevas lagunas que en el primer examen no se habían detectado. Las lagunas, grandes y pequeñas, que se habían revelado en la etapa precedente, se quedan vacías. El espacio que se extendía entre las páginas 719 y 731 (estilo antiguo) se extiende ahora entre las páginas 7199 y 7311. Sigue ahí, ni más grande ni más pequeño, ya que las nuevas páginas son diez veces más delgadas que las antiguas.

Basta ahora con aumentar la precisión cada vez, es decir, trabajar sobre libros que tienen cada vez más páginas, que son más y más delgadas. Permito que el lector imagine lo que se obtendría en el límite, un pseudolibro con páginas infinitamente delgadas pero infinitamente numerosas, cada una de las cuales ocupa en el espacio un volumen total nulo. Dichas páginas están repartidas entre muchas lagunas, pero de manera homogénea en cualquier escala, pliegos de tamaños diferentes separados por espacios vacíos. Para llevar al colmo la perplejidad del lector, no me queda más que recordarle que la misma trayectoria explora toda la superficie del atractor: todas estas páginas forman de hecho una misma hoja, cuyos pliegos están escondidos por la encuadernación. Imaginemos entonces que un punto atraviesa o entra en la encuadernación por la página 7111 (a partir de ahora, el pseudolibro contiene un número infinito de páginas y la numeración de todas requiere un número infinito de cifras, todas impares por supuesto), que vuelve a salir en la página 3917, paseándose sobre ésta, antes de volver a entrar en la encuadernación y salir en otro lugar, recorriendo todo el libro. Tal vez ahora el lector comprenda por qué hemos dado a ese tipo de objetos —que aparecen naturalmente en la teoría del caos y no solamente en el caso del sistema de Lorenz— el nombre de atractor extraño.

Nos hemos entregado
a un estudio experimental del caos,
tal como lo han puesto en evidencia Laskar
en los movimientos majestuosos de los planetas,
y Lorenz, a través de las tribulaciones
cotidianas de la atmósfera.

Si vemos los resultados más de cerca,
constatamos que en último análisis
todo se basa en un cálculo.
Empero, ¿será posible calcular las trayectorias
de un sistema caótico?

Máquinas y matemáticas

LOS SISTEMAS caóticos son fundamentalmente inestables: las pequeñas desviaciones iniciales provocan rápidamente grandes desviaciones. Dicha inestabilidad mecánica debería crear lógicamente una inestabilidad numérica: pequeñas fallas de cálculo, como por ejemplo los errores de redondeo, deberían desfigurar rápidamente la solución. ¿Cómo es posible entonces que Laskar y Lorenz puedan anunciar sus resultados con tanta confianza?

La respuesta a esta pregunta nos llevará a investigar la noción de modelo y a reflexionar sobre el lugar que ocupan las matemáticas en la ciencia. Veremos que la teoría del caos está situada en una zona fronteriza, donde las matemáticas traducen nuestra percepción de la realidad gracias a las herramientas informáticas.

CÓMO CALCULAR TRAYECTORIAS INESTABLES

Regreso al experimento de Lorenz

PARA EVIDENCIAR el atractor de Lorenz y el caos en la mecánica celeste, hemos recurrido a simulaciones numéricas, es decir, hemos calculado por computadora y representado gráficamente en la pantalla cierto número de trayectorias que hemos seguido hasta colmarnos la paciencia. De manera general, hemos señalado la importancia de dichas simulaciones, que se han vuelto no solamente posibles sino fáciles gracias al progreso del material informático y las técnicas del cálculo. Dichos nuevos instrumentos permiten suplir la experimentación física cuando ésta ya no es posible. Y no lo es siempre. Después de todo, bien se querría crear en el laboratorio un modelo reducido del sistema solar y ver cómo se comporta cuando varían los diferentes parámetros (masas, posiciones y velocidades iniciales), pero haría falta restarle la atracción terrestre, y realizar el experimento en la ingravidez. Puede que un día se logre hacerlo en una estación espacial cualquiera; mientras tanto, nos vemos forzados a conformarnos con los cálculos de Laskar.

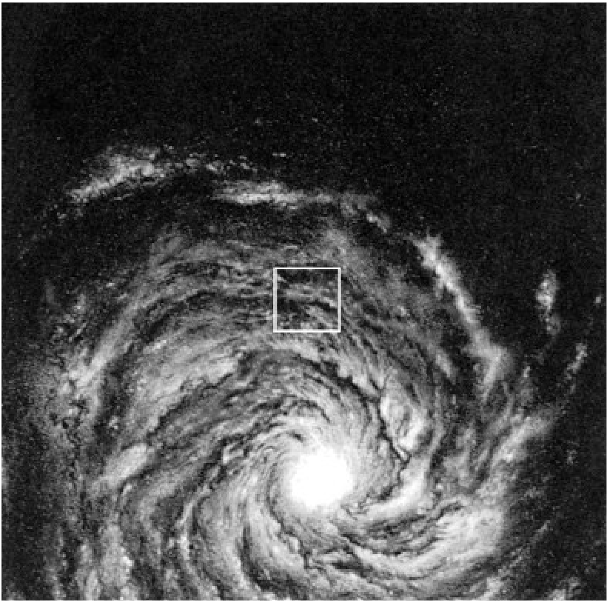
Empero, ¿cuánta confianza otorgarles? Quede claro que no dudamos de la competencia de Jacques Laskar, un científico eminente, que además es mi amigo. El problema que se presenta aquí es mucho más general, y puede ser que algunos lectores ya se hayan planteado la pregunta: los redondeos inevitables que hace la computadora a lo largo del cálculo, que introduce errores relativos a la trayectoria exacta, ¿no la desfiguran rápidamente? ¿Existe una garantía de que la trayectoria calculada se aproxime a la trayectoria exacta? Para los sistemas caóticos sucede más bien lo contrario, y nos hemos acostumbrado a ver que una excelente aproximación exacta hasta el sexto, duodécimo o vigésimo cuarto decimal, al principio, se convierte en una trayectoria completamente diferente con el paso del tiempo.

Para entenderlo bien, retomemos la historia de Lorenz, quien vuelve a emprender un cálculo a la mitad, y se da cuenta de que la trayectoria calculada ya no tiene nada que ver con la trayectoria inicial. Hay un error en alguna parte, y él lo descubre: la segunda vez, los datos fueron desfigurados, ya que la computadora se había quedado únicamente con tres de las seis cifras que incluía al principio. Entonces, la trayectoria que se volvió a calcular es *falsa*, siendo *verdadera* la primera. El orden regresa a casa, el impostor es desenmascarado, y dormimos tranquilos, orgullosos de haber entendido algo.

Falsa tranquilidad, ilusión funesta. Yo propongo que la primera trayectoria es tan *falsa* como la segunda. En efecto, retomemos dicha trayectoria supuestamente *verdadera*, y veamos qué hace la computadora con ella. La agarramos a la mitad, en el instante que Lorenz interviene para anotar los doce valores de las doce variables descriptivas. Sus valores contienen seis cifras significativas —Lorenz anotará solamente tres—, y la computadora sigue su cálculo con las seis cifras, y se queda así, con la trayectoria *verdadera*. Pero ¿qué pasa un instante después? La computadora recorta el tiempo en trozos pequeños, en instantes sucesivos, calculando la posición siguiente a partir de la posición precedente mediante ecuaciones de movimiento. Por simples que sean las ecuaciones, habrá que multiplicar, a menudo varias veces. Cuando se multiplican dos números de seis cifras, se obtiene un número de once o doce cifras (invitamos al lector a comprobarlo). Y ahí tenemos a nuestra computadora llena de vergüenza: estaba tan orgullosa de haber conservado datos de seis cifras, mientras que el buen Lorenz partía con datos desfigurados a una trayectoria falsa. Pero, al instante siguiente, por el juego del cálculo, las seis cifras se han vuelto once, hasta doce, y tendrá que redondearlas, es decir, desfigurarlas, para volver a quedarse con seis.

Ciertamente, bajar de once cifras a seis es menos grave que bajar de seis a tres: la precisión retenida, que era de una millonésima en el primer caso, no es más que de una milésima en el segundo. La computadora es, entonces, más precisa en sus cálculos que Lorenz en su error, pero es una diferencia de grado y no de naturaleza. La computadora y Lorenz hacen exactamente lo mismo, desfiguran los datos, con la sola diferencia de que Lorenz lo hace solamente una vez y que en cada etapa del cálculo la computadora recurre a las tijeras. Y si el error de Lorenz tuvo tales consecuencias, ¿cuántas más no tendrán los errores redondeados que se acumulan a lo largo de la trayectoria? Ciertamente, son más pequeños, del orden de la millonésima en vez de la milésima; pero queda el hecho de que se van acumulando, y ya hemos visto que el tamaño no influye en esta historia. Un error mil veces más pequeño que otro se sentirá igual; simplemente habrá que esperar un poco más, tres veces el tiempo característico, para decirlo en términos completamente exactos.

Este razonamiento es perfectamente irrefutable. Sin em-



Un caos de estrellas. *Aquí tenemos el principio de un descenso vertiginoso que nos va a llevar de* 10^{21} *metros (mil millones de billones de kilómetros), la dimensión de la figura, a la escala humana, que es del orden de un metro. Se distingue aquí la Vía Láctea, nuestra galaxia, cuyos brazos espirales son testigos de un movimiento muy lento, de una vuelta cada trescientos millones de años. Nuestro Sol está ubicado en la región encuadrada, cuya dimensión es diez veces más pequeña que la imagen completa, y que representa la etapa siguiente en el descenso. Foto:* © Pour la science. Les Puissances de dix, col. L'Univers des sciences.

bargo, si ninguna de las dos trayectorias calculadas por Lorenz es la buena, ¿dónde se encuentra ésta? ¿Cómo obtener la trayectoria verdadera, cuya existencia demuestran los matemáticos, aquélla que corresponde precisamente a las condiciones iniciales? No será, por cierto, incrementando la precisión; si se guardaran nueve cifras en lugar de seis, desde la primera multiplicación deberíamos redondear de 17 o 18 a nueve, es decir, que tendríamos un error del orden de una mil millonésima, que se haría sentir al cabo de nueve veces el tiempo característico, sin contar los otros errores de redondeo que no tardarán en acumularse a lo largo del cálculo. La única solución sería no redondear en absoluto. Pero eso no es posible. Al empezar con datos de seis cifras, en seguida se obtienen datos de doce cifras, al instante siguiente 24, luego 48, 96, 192, 384, 768, 1536, total, apenas hemos empezado y ya arrastramos 1500 cifras por cada variable (son doce); a este ritmo vamos a saturar la memoria de la computadora simplemente al ordenar los valores en cuestión.

El problema no tiene solución. La trayectoria verdadera, la que corresponde exactamente a las condiciones iniciales que uno había fijado, no es accesible al cálculo. Cualquiera que sea la precisión de los cálculos, con toda seguridad la trayectoria calculada se distanciará de ella al cabo de un tiempo más o menos largo. En esas condiciones, ¿qué significado darle a una simulación numérica? No se calcula trayectoria real alguna (ya que no conocemos las condiciones iniciales reales con suficiente precisión), ni una trayectoria verdadera (ya que no se pueden hacer los cálculos con suficiente precisión). ¿Qué es exactamente lo que se calcula?

Según los resultados de Laskar, el sistema solar tendría un tiempo característico del orden de diez millones de años. Esto quiere decir que las pequeñas desviaciones se multiplican por diez en diez millones de años. Y hay quien pretende seguir la evolución del sistema solar durante varios miles de millones de años, y sacar conclusiones sobre el porvenir y el pasado, así como la probabilidad que tendría Mercurio de escaparse, o la posibilidad de que Venus se haya volteado. Pero mil millones de años es cien veces el tiempo característico. Para poder saber dónde estarán los planetas en mil millones de años, haría falta conocer sus masas, sus posiciones y sus velocidades actuales con cien cifras significativas. Ni Laskar ni nadie pretenden conocer los datos con esta precisión, que es, como ya lo hemos visto, no solamente inaccesible a la medida sino que está desprovista de significado físico. Haría falta aumentar los cálculos con la misma precisión, es decir, cien cifras significativas, lo cual tampoco es posible. Parece, pues, que los resultados de Laskar se contradicen, en el sentido de que afirman que no se han reunido las condiciones para una predicción exacta a una escala de mil millones de años.

En realidad, ¿qué calculamos?

La resolución de la paradoja tiene un resultado matemático muy sorprendente, conocido con el gráfico nombre inglés de s*hadowing lemma* (el lema de la sombra). Un lema es un enunciado matemático de carácter generalmente técnico y de demostración delicada; ser sombra de alguien es el ejercicio al que se dedica un detective que intenta no despegarse de los talones del sospechoso. El lema de la sombra nos asegura que, de cierta manera, la incertidumbre de la posición inicial y los errores de redondeo se compensan: existe (en el sentido matemático, es decir que sería muy difícil mostrarlo pero sabemos que está ahí) una trayectoria *verdadera* que coincide con la trayectoria calculada en la medida de la precisión retenida por el cálculo, tres, seis, doce o 24 cifras. Por ende, ambas trayectorias coinciden en la computadora, que se queda solamente con las primeras cifras. La palabra *trayectoria* se presta aquí a confusión. Únicamente merece dicho título la trayectoria *verdadera*, cuya existencia nos asegura el lema de la sombra: cada uno de sus puntos se deduce por la aplicación rigurosa, sin error ni redondeo, de

Geometría celeste. *Hemos recorrido nueve etapas desde la imagen de la Vía Láctea, y henos aquí a una escala de 10^{12} metros (mil millones de kilómetros). Se perciben las órbitas de los planetas interiores, de Mercurio a Marte, y algunos fragmentos de la órbita de Júpiter. En el amplio espacio que separa las órbitas de Marte y de Júpiter evolucionan asteroides, reliquias de un planeta que no se formó. Foto:* © Pour la science. Les Puissances de dix, col. L'Univers des sciences.

ecuaciones que rigen el sistema. La primera, la trayectoria *calculada*, no es una de ellas, en el sentido de que cada uno de sus puntos está manchado por un error y, dado que dichos errores se amplifican y se acumulan, se puede preguntar qué será del producto final. En todo caso, no es una trayectoria de verdad, determinada por la evolución natural del sistema, sino a lo sumo una trayectoria *con ruido* producido por parásitos exteriores. El milagro es que dicha trayectoria rota o falsa se aproxime a una trayectoria verdadera, tan cercana que la precisión retenida no puede distinguirlas.

La misma inestabilidad de la trayectoria hace posible el milagro. Toda la acumulación de errores sucesivos de redondeo puede ser compensada por un simple desplazamiento del punto de partida, desplazamiento que también será insensible a los niveles de precisión retenida, pero que no es menos real, y los efectos amplificados corregirán todas las inexactitudes. Todo acontece como si la computadora no calculara la trayectoria correspondiente a los datos que le habíamos dado, sino a otros datos, tan aproximados a los precedentes que es incapaz de distinguirlos, y que, sin embargo, son diferentes. Tan es así que las órbitas calculadas por Laskar, con una precisión que quizás llega a diez cifras pero ciertamente no a cien, son en efecto posibles trayectorias del sistema solar durante varios miles de millones de años. Corresponden a condiciones iniciales que son mucho más precisas que las diez cifras, o más, retenidas por sus datos, y que sirven de punto de partida para sus cálculos, y *siguen como a su sombra* a las (falsas) trayectorias calculadas (coinciden con ellas) hasta la décima cifra significativa.

Se pueden calcular trayectorias verdaderas a pesar de todos los errores que se cometan al inicio y en cada una de las etapas ulteriores. Es notable, y por lo menos paradójico, que sea la misma inestabilidad de los sistemas caóticos lo que abre dicha posibilidad. También se abren otras: veremos enseguida cómo calcular probabilidades de diversos tipos de trayectorias, y cómo evitar los errores de modelización.

Las posibles fuentes de error son numerosas, y cada una podría paralizarnos si no dispusiéramos de los resultados de estabilidad recién señalados. Por ejemplo, el modelo clásico de la mecánica celeste, basado en la ley de Newton, no es perfectamente exacto. El modelo que se usa hoy está basado en la curvatura del espacio-tiempo. Ciertamente, en las condiciones del sistema solar, la diferencia es imperceptible, excepto en el caso del planeta Mercurio, para quien integramos una *corrección relativa* en las ecuaciones. Sin embargo esta diferencia, inicialmente insensible, se va a amplificar, y crea una duda sobre las predicciones a largo plazo, además de una imprecisión en la posición inicial, donde los errores de redondeo a lo largo de los cálculos pueden poner en peligro el resultado final.

No obstante, el problema no es precisamente el mismo, ya que se trata de un error del modelo, no de los datos. Ya no se equivoca uno con las variables, sino con las ecuaciones. Y, a pesar de eso, tenemos el mismo resultado: las trayectorias obtenidas con las ecuaciones de Newton permanecerán cerca de las trayectorias obtenidas por las ecuaciones de Einstein, y eso más allá del tiempo característico (de hecho, indefinidamente). Se trata de un resultado de estabilidad estructural, que se paga al mismo precio que la estabilidad numérica. La trayectoria relativa que *va como sombra* de la trayectoria newtoniana, no parte exactamente de las mismas condiciones iniciales, aunque no se distingue al nivel de precisión retenida.

Si nos dejáramos llevar por la fantasía y evaluáramos, por ejemplo, la probabilidad de que Mercurio deje un día el sistema solar, también podemos proceder por simulación numérica. Las observaciones nos permiten ubicar a Mercurio a unas centenas de metros de aproximación: en el estado actual de nuestros conocimientos, el centro del planeta puede estar ubicado en un cubo de unos cientos de metros de lado. Que no quede por eso: tiremos, pues, al azar una posición de partida para Mercurio en dicho cubo, y veamos dónde estará después de tres mil millones de años. Volvamos a empezar el experimento. Después de todo, no tiene consecuencias graves y no cuesta más que tiempo de cálculo. La estadística promedio de los casos favorables, es decir, el número de veces que encontramos al planeta fuera del sistema solar dividido entre el número total de experimentos, nos da una probabilidad de evasión para Mercurio. ¿Será dicha probabilidad algo distinto a un artefacto matemático? ¿Afectarán a Mercurio esas simulaciones puramente numéricas? ¿Podemos acercarnos y fingir que aquí, en efecto, está la probabilidad de que se escape del sistema solar? Otra vez, podríamos plantear las mismas objeciones, basadas en la inestabilidad de las condiciones iniciales. De nuevo, sin embargo, tenemos un resultado de estabilidad: la estadística promedio evaluada de esta manera se acerca a la probabilidad real.

Finalmente, gracias a dichos resultados de estabilidad podemos confiar en las simulaciones numéricas: sin ellas, los sistemas caóticos serían inaccesibles al cálculo. Su demostración está lejos de ser simple, y constituye uno de los principales experimentos de la teoría matemática que se desarrolló alrededor de los sistemas caóticos. Es realmente uno de los casos en que la práctica se completa y justifica con la teoría. Gracias a las simulaciones numéricas, hemos adquirido un conocimiento experimental muy completo de los sistemas caóticos. Se puede dar otro paso más allá todavía, hemos agudizado nuestra visión del mundo: hasta ahora, hemos trabajado con planos, rectas y esferas. En el futuro, los alumnos jugarán con el atractor de Lorenz y programarán la ley de Newton en su computadora personal. El hecho de que las simulaciones numéricas sean tan concluyentes como la experimentación física y de que la visión del espacio que nos da la computadora sea exacta, constituyen resultados de la estabilidad que nos permite hacer tales afirmaciones.

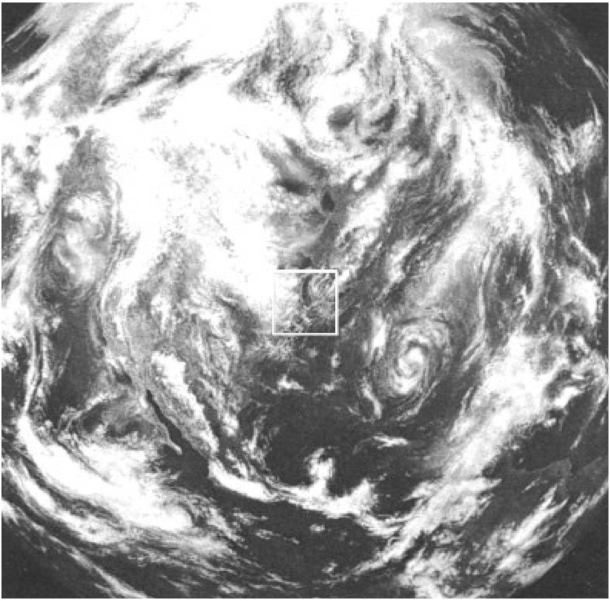
¿QUÉ ES LA TEORÍA DEL CAOS?

Las teorías científicas

La teoría del caos es como la geometría euclidiana: no es una teoría científica, sino un conjunto de resultados matemáticos.

Parece una paradoja. ¿Qué existe que sea más seguro, qué mejor garantía hay contra todo riesgo de error que los resultados matemáticos?, y ¿por qué entonces negarles el estatus de teoría científica? Es que la teoría científica nos dice algo sobre el mundo, y las matemáticas nos dicen algo sobre las matemáticas. La ciencia lleva un riesgo de error, pero se aplica a la realidad. Las matemáticas son necesariamente verdaderas, pero esta certidumbre se aplica únicamente a las matemáticas, y no al uso que se podría hacer de ellas.

Uno espera que la teoría científica nos enseñe algo sobre el mundo que nos rodea, sobre uno de los aspectos físicos, biológicos o sociales de dicha realidad multiforme donde vivimos. La teoría de Galileo dice que en el espacio existen puntos de referencia absolutos, y que si se les pone en movimiento, se constata que la aceleración que se imprime a un cuerpo es el cociente de la fuerza que se ejerce sobre él dividida entre su masa. En física, la teoría newtoniana dice que los cuerpos se atraen de manera directamente proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia; con esta idea se prueba que un planeta solo,



Un caos térmico. *Hemos descendido cinco escalones tras la imagen anterior, y aquí nos encontramos a la escala de* 10^7 *metros (diez mil kilómetros). En este punto distinguimos el más bello de todos los sistemas caóticos, la atmósfera terrestre. Sobre un fondo azul y marrón, en rotación hacia el este, las nubes se forman y deforman. La renovación del espectáculo es permanente y el globo planetario pareciera estar vivo. Sin embargo, vemos también que la atmósfera no es sino una fina película alrededor de la Tierra, que está sometida a influencias múltiples, que provienen tanto del interior del globo como del espacio exterior. Foto:* © Pour la science. Les Puissances de dix, col. L'Univers des sciences.

gravitando alrededor del Sol, traza una elipse, lo que va de acuerdo con las observaciones de Kepler. En biología, la teoría darwiniana dice que las formas de los animales no son inmutables, y que las especies evolucionan como resultado de un fenómeno de selección natural, que ha sido entendido de diversas maneras según las épocas o los autores, pero que sigue llamándose lucha por la vida.

Estas teorías tienen en común el hecho de que todas resultarán verdaderas o falsas o, más exactamente, se situarán en alguna parte de la escala que va de lo rigurosamente exacto a lo completamente falso, y podrán ser apreciadas por su posición en dicha escala. Esta apreciación es subjetiva y continuamente se pone a prueba. Galileo, por ejemplo, luchó toda su vida por imponer sus ideas, que hoy nos parecen tan naturales que nos cuesta trabajo entender las de sus predecesores. En cuanto a Darwin, sus ideas suscitan todavía hoy, en los integristas cristianos, una oposición muy viva, y ciertos estados norteamericanos imponen la enseñanza obligatoria del dogma de la Creación bajo el mismo título que la teoría de la evolución. Esto significa que es propio de una teoría científica que se le someta permanentemente a juicio: ser verdadera o falsa. Las dos cosas van juntas: solamente puede ser verdadera porque también podría ser falsa. La piedra de toque que distingue la teoría científica del mito religioso o de la lucubración pura y simple es el hecho de ser refutable, es decir, que puedan volver a hacerse los experimentos. El conocido experimento de Michelson y Morley mostró que la velocidad de la luz era la misma en todos los puntos de referencia. Por eso hemos abandonado la teoría de Galileo de los puntos de referencia absolutos por la teoría de Einstein de la relatividad restringida. Para desmentir la teoría de la evolución, podríamos designar dos poblaciones de animales de la misma especie y colocarlos en condiciones climáticas y biológicas diferentes, y ver que, generación tras generación, los individuos siguen siendo idénticos unos a otros, aunque ambas poblaciones estén separadas. Darwin sostenía que tal experimento había tenido lugar en las islas Galápagos, donde poblaciones de animales, aisladas desde hacía mucho, habían presentado modificaciones sensibles con relación a sus congéneres de tierra firme.

En contrapartida, es obvio que la idea de que Dios ha creado el mundo, tal como lo vemos hoy, desde hace cinco mil años, es intelectualmente más cómoda porque hay riesgo de que se vuelva a cuestionar. Es probable que Dios hubiera podido adornar algunas rocas con fósiles de dinosaurios, aún si estas bestias no hubieran existido, así como crear en las islas Galápagos animales diferentes de los de tierra firme. Hasta que no se haya inventado una máquina del tiempo, ningún experimento concebible podrá diferenciar jamás dicho mundo de otro donde los dinosaurios hayan existido de verdad. Un científico vive en un mundo donde la única certidumbre es provisional. Su universo es un cementerio de ideas equivocadas y teorías rebasadas, y hasta la teoría que ha adoptado está presente de manera provisional, esperando a ser remplazada por una mejor.

Pero los resultados de la matemática pura, como la geometría de Euclides, no entran al juego de verdadero o falso, aunque a veces se usen las palabras en la teoría para calificarlos. Cuando hablamos de la teoría de los números* o de la teoría de Galois*, no estamos hablando de algo que podría después de un tiempo revelarse como inexacto, ni ser señalado como equivocado a partir de algún experimento. La suma $2 + 2 = 4$ no pertenece al orden de las leyes de la física, pero sí al de la necesidad lógica. Podemos usarla para deducir otros resultados matemáticos, como $1 + 1 = 2$, así como una definición adecuada de los números 1, 2, 3 y 4. No es verdadera en el sentido de que nos diga algo sobre el mundo en que vivimos, pero sí sobre su coherencia con el resto de las matemáticas. No se puede refutar: ¿qué experimento nos convencería que $2 + 2 = 5$? No está sujeta a revisión ni se puede mejorar. No esperamos que los matemáticos del futuro, más inteligentes que nosotros, encuentren un valor mejor para $2 + 2$ que 4, ni Estados Unidos ha legislado sobre el valor de $2 + 2$, y el autor de una teoría alternativa que sostuviera que $2 + 2$ podría tener un valor distinto a 4 se arriesgaría a ser guiado discretamente a un hospital psiquiátrico.

Las teorías matemáticas

En las matemáticas, la palabra teoría señala un conjunto de resultados que tienen en común el ser aplicables a un mismo dominio (teoría de los números) o que se deben al genio de una sola persona (teoría de Galois). Son construcciones puramente lógicas, que se limitan a deducir las consecuencias necesarias de algunos resultados matemáticos considerados fundamentales (los axiomas), pero que no tienen como fin aplicarse al mundo físico, biológico o social. En dicho sentido, no son teorías científicas. La geometría euclidiana, por ejemplo, deduce las consecuencias necesarias de ciertos axiomas, nueve en total, entre ellos el célebre axioma de Euclides (por un punto pasa una sola paralela a una recta dada). Nos dice que si aceptamos esos axiomas, también aceptamos el hecho de que, en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es la suma de los cuadrados de los catetos (teorema de Pitágoras). Excepto por un error de razonamiento que se nos escapó durante más de dos mil años, la geometría euclidiana es necesariamente verdadera.

Que el mundo exterior se conforme a ello o no, es otro asunto, que no concierne tanto al matemático como al físico. Si trazáramos en una hoja de papel, con una escuadra y una regla, un triángulo rectángulo de lados 3 y 4 y encontráramos que la hipotenusa mide 5, no es con el teorema de Pitágoras $3^2 + 4^2 = 5^2$ que podríamos verificarlo, sino con la teoría de Galileo, según la cual las distancias entre puntos en el espacio pueden calcularse por medio de las fórmulas de la geometría euclidiana. Si un día nos diéramos cuenta de que no es así, no sería la geometría euclidiana lo que abandonaríamos, sino la teoría de Galileo. Haría falta entonces buscar apoyo en otras clases de geometría (existen, y todas igual de verdaderas que la geometría euclidiana, por la misma razón) para calcular puntos en el espacio. Es, por cierto, lo que pasa en la teoría de la relatividad: el experimento prueba que, cuando se mueven objetos a velocidades cercanas a la de la luz, la geometría euclidiana ya no se aplica, lo cual expresamos torpemente al decir: "El desplazamiento contrae la distancia." Está claro que el desplazamiento no contrae cosa alguna, sino que simplemente se trata de una geometría distinta a la geometría euclidiana la que se aplica a esta situación. Pero no por eso el teorema de Pitágoras es menos rigurosamente verdadero, aun si la realidad física se niega a conformarse a él, un poco como las reglas del ajedrez, que siguen siendo verdaderas independientemente de que uno juegue a las damas.

La teoría del caos, al igual que la geometría euclidiana o la teoría de los números, es un conjunto de resultados matemáticos, que tienen vida propia, independientemente del hecho de que se apliquen o no a fenómenos observados. Se conforma con sacar las consecuencias lógicas y necesarias de ciertas ideas introducidas en el siglo XVII para construir modelos del tiempo. Nos enseña que si aceptamos los modelos matemáticos usados comúnmente desde hace cuatro siglos, que permitieron a Newton, Poincaré y Einstein hacer sus cálculos, entonces hace falta aceptar también la posibilidad de fenómenos caóticos, como los que hemos descrito en la primera parte del libro: la inestabilidad en relación con las condiciones iniciales, la existencia de atractores extraños. Nos enseña asimismo que, si dichos fenómenos caóticos se producen, tendrán a su vez consecuencias que, por lógicas y necesarias que sean, no dejan de ser inesperadas de vez en cuando. Por ejemplo, hemos mencionado las diversas formas de estabilidad que se encuentran en los sistemas caóticos, aunque inestables en relación con las condiciones iniciales, las cuales permiten que se inicien simulaciones numéricas. Además, la teoría del caos se ha desarrollado en otras direcciones que no hemos mencionado aún, como intentar una clasificación parcial o total de los sistemas caóticos.

Así, la teoría del caos es ante todo un paso en el progreso continuo de las matemáticas. Y no saben lo feliz que me hace eso, siendo matemático. ¿Cuántas veces no me habrán hecho con aire estupefacto la pregunta: "¿Investiga usted las matemáticas? ¿Qué queda por encontrar ahí?", como si los casos de igualdades de ángulos fueran la última palabra de la ciencia, y estuviéramos restringidos a repetir las mismas cosas desde hace dos mil o doscientos años, según sea más o menos caritativo el interlocutor. Dicha impresión se mantiene en los libros de divulgación, que no abarcan casi nunca el siglo XX, y tamizan indefinidamente las mismas propiedades de los números primos. En realidad, las matemáticas son una ciencia extraordinariamente viva, que progresa a un ritmo muy rápido. Prácticamente, todos los resultados considerados importantes hoy han sido descubiertos en el siglo XX; en cuanto a los resultados corrientes, los que son el pan cotidiano de los investigadores, caducan cada cinco años.

Un artículo de investigación matemática cita entre 20 y 50 artículos anteriores, sobre los cuales se basa; diez por ciento de los artículos tendrán más de cinco años, y es raro que uno de ellos tenga más de 20 años.

Desde este punto de vista, la teoría del caos es, para los matemáticos, una teoría como cualquier otra, que nació en el siglo XX, y que está en continuo progreso, marcado cada año por la publicación de decenas de libros y de artículos técnicos. Tiene de particular que suscita interés más allá de las fronteras matemáticas, entre científicos de otras disciplinas y aun el público en general (incluido el comprador de este libro). No es común que los resultados matemáticos se den a conocer más allá de un círculo de iniciados; las raras veces que eso ocurre, tiende a inspirar más desconfianza que entusiasmo. En efecto, da temor que el interés suscitado por la teoría del caos se deba en parte a su nombre, y que haya quien se acerque a ella para buscar una teoría del desorden general, incluso del desbarajuste ambiental, lo cual evidentemente estaría expuesto a graves contrariedades y no ayudaría al progreso de la ciencia. Empero, veremos que existen mejores razones para interesarse en la teoría del caos, y por una vez, la confianza del público no está mal fundada. El mayor impacto de dicha teoría está por venir; no quedará limitado a las matemáticas, sino que se hará sentir sobre toda la ciencia en conjunto.

Modelos y modelización

Para entender las razones de la última aseveración, hará falta tener presente en espíritu la estructura de las teorías científicas, por lo menos en el dominio de la física. Estas teorías se componen —más bien se componían hasta ahora, puesto que, según se verá, la teoría del caos amenaza cambiar dicha estructura— de dos partes, enfrentadas la una con la otra. De un lado, tenemos un sistema físico, del otro, un modelo matemático, y entre los dos hay una correspondencia misteriosa: el estado del sistema está descrito por el valor de algunas variables del modelo, y la lógica interna del modelo constriñe al sistema. El prototipo de todas las teorías físicas es la teoría de Newton. Por un lado, está el sistema solar, el Sol al centro, y todos los cuerpos celestes, planetas, asteroides y cometas gravitan alrededor de él. Por el otro, tenemos puntos en un espacio euclidiano de tres dimensiones y ecuaciones que determinan sus movimientos. Entre ambos sucede un milagro permanente, que hace que el movimiento matemático de dichos puntos abstractos coincida con el movimiento observado de los cuerpos celestes en el espacio concreto, y así, se puede predecir la posición de los planetas al calcular la solución de las ecuaciones de Newton. Dicho milagro se ha vuelto tan habitual, que ya ni siquiera pensamos en ello, pero eso no le quita lo incomprensible, por lo menos para el autor de estas líneas.

Sea lo que fuere, este paso de modelización* forma la base de toda la ciencia moderna. En la física moderna se está llegando a modelos donde uno no sabe si hace falta admirar la sofisticación matemática o la potencia de predicción. Empero, la biología y la economía también han desarrollado modelos que son etapas importantes en el desarrollo de la ciencia, aunque menos sofisticados y menos poderosos. Por supuesto, dichos modelos son tan variados como las situaciones que representan, en la medida en que lo permite el estado de las matemáticas. Sin embargo, se les puede clasificar en dos grandes categorías, modelos estocásticos y modelos deterministas, según hagan o no uso del azar.

Un modelo es estocástico* si, en un momento dado, se lanzan los dados y se utiliza el resultado obtenido. En la física moderna se calculan probabilidades: la probabilidad de que un electrón pase de una órbita atómica a otra, la probabilidad de que un núcleo se desintegre, la probabilidad de que un par de antipartículas nazcan del vacío. Si el fenómeno se producirá efectivamente, si tal electrón cambiará de nivel de energía, si dicho núcleo se desintegrará o si veremos aparecer en tal lugar un positrón, no se sabe; todo depende de un golpe de suerte en el cual no participa el físico. Este es el prototipo de un modelo estocástico, y eso le molestaba mucho a Einstein, quien se preguntaba con todo derecho, ¿quién lanza los dados? Es verdad que la física clásica ya nos tenía acostumbrados a los modelos deterministas, donde nadie lanza los dados, y que en este punto la física relativista sigue el ejemplo de Newton. En el modelo determinista*, la evolución del modelo está enteramente determinada por su estado actual: si uno sabe resolver las ecuaciones, se pueden predecir los estados futuros y reconstruir los estados anteriores.

El primer efecto de la teoría del caos (digamos de inmediato que, a mis ojos, es el menos importante) consiste en ampliar la paleta de modelos disponibles para representar fenómenos irregulares o aleatorios. Hasta ahora, cuando el físico, el biólogo o el economista encontraban un fenómeno de este tipo, buscaban un modelo estocástico, según la idea de que un modelo determinista conduciría necesariamente a un comportamiento regular y predecible, en contradicción, precisamente, con el fenómeno que se buscaba modelar. Si la teoría del caos parece tan interesante a los investigadores de estas disciplinas, es porque abre la puerta a otras posibilidades, como la de proponer un modelo determinista y, sin embargo, caótico. Podemos esperar, entonces, rendir cuenta del sistema físico sin hacer uso, como en los modelos estocásticos, de un *deus ex machina* que lanza los dados. Retomando el ejemplo del muñeco de la calle Berthaud, se podría por supuesto proponer un modelo estocático, es decir, evaluar las frecuencias de aparición de las cifras de 1 a 5 en los diversos protocolos del experimento, e imaginar que dichas cifras están tiradas a la suerte según dichas probabilidades. Empero, es mucho mejor haberle dado la vuelta para ver el mecanismo en acción.

Daremos otro ejemplo, más actual. Uno de los fenómenos de base de la economía es la existencia de los ciclos de actividad, que hacen alternar periodos de recesión y expansión. Estos son a veces más pronunciados, y a veces menos, según las actividades y las circunstancias (todavía nos acordamos de la gran recesión de 1929), a veces duran más tiempo y a veces menos (después de la segunda guerra mundial Europa conoció 30 años de expansión ininterrumpida), pero siempre están presentes. Por medio del experimento se ha comprobado que no son previsibles; hasta somos incapaces de determinar si tal baja de actividad es pasajera o si señala la entrada a una recesión y el principio de un nuevo ciclo. Tampoco son completamente aleatorias: al contrario, análisis históricos demuestran encadenamientos perfectamente lógicos entre las anticipaciones de los actores y sus comportamientos, y señalan la importancia que pueden tener ciertas políticas, en uno y otro sentido. Sin duda, uno de los principales problemas que enfrenta la ciencia económica consiste en explicar dichos ciclos. ¿Hace falta buscar respuestas en el funcionamiento interno de la economía? ¿Hace falta atribuir los resultados a factores exteriores a ella, ya sea la incompetencia de los gobernantes o el progreso industrial?

Hasta ahora se ha privilegiado la segunda explicación. Por la irregularidad de los ciclos, se ha buscado representarlos por medio de modelos estocásticos, es decir, se pretende explicar los ciclos como resultado de choques provenientes del exterior de naturaleza aleatoria a los cuales se somete la economía. Para lograrlo, determinados modelos, por ejemplo, utilizan la innovación tecnológica, y cada invención nueva da como resultado un salto cualitativo, un grano de productividad brutal que se reparte a través de toda la economía (choque tecnológico). Empero, la teoría del caos ofrece nuevas posibilidades de explicación, y en los últimos años se ha visto un florecimiento de modelos deterministas que ligan los ciclos económicos a las anticipaciones de los agentes (consumidores y productores), a la alternación de las generaciones, hasta a la investigación de una sociedad óptima por un planificador benévolo. Lo que tienen en común todos esos modelos es que ven la economía como un sistema caótico. Los ciclos resultan, entonces, una de las consecuencias de dicha hipótesis; por supuesto que tiene otras, y creo que aún no hemos terminado de explorarlas.

En general, la teoría del caos amplía considerablemente las posibilidades de aplicación de los modelos deterministas. Hasta ahora, su utilización parecía limitada a sistemas completamente previsibles, perfectamente transparentes a la mirada del sabio, que podía penetrar de manera indiferente tanto el pasado más remoto como el futuro más lejano. Esta era la visión de Laplace, que, por el simple hecho de que el universo estuviera sometido a la ley de Newton, concluyó que todo estaba determinado desde el presente, y que una inteligencia que pudiera conocer las posiciones y las velocidades exactas de cada partícula del Universo podría calcular el pasado y el futuro. Todo está escrito en el gran libro del Universo, todo está escrito hoy; sólo falta saber leer.

La teoría del caos nos libera de la carga sofocante de un Universo cerrado donde no puede pasar nada, donde no hay nada desconocido ni sucede nada nuevo. La visión que nos propone es completamente diferente, inspirada en el atractor de Lorenz. Lo cierto es que el Universo está regido por modelos deterministas, bien sea el de Newton o el de Einstein. Sin embargo, eso no implica que se pueda calcular el futuro, no más que el pasado: hemos visto suficientes sistemas caóticos para entender que el tiempo característico impone un límite estricto sobre toda previsión. Empero, eso tampoco implica que no quede nada por decir más allá del tiempo característico. Gracias al sistema de Lorenz, nos hemos enterado de la existencia de los atractores extraños, hacia los cuales se dirige el sistema de manera natural para no abandonarlos. De donde sea que parta el sistema, sabemos dónde tenemos cita: en el atractor. He aquí, por fin, una predicción que podemos hacer con certidumbre: el sistema estará en el atractor extraño.

Al proponer un modelo determinista para el Universo, se afirma que está sometido a leyes estrictas que restringen su evolución en el tiempo que tiene de vida; no debe dejar su atractor extraño. Desde el punto de vista de la física, como ya hemos visto, esto equivale a decir que todos los estados teóricamente posibles no son prácticamente realizables, y que los estados naturales, aquellos que pueden aparecer en el curso de la evolución del Universo, deben tener propiedades muy particulares. Es así como aparecen las leyes físicas: son conjuntos de relaciones que caracterizan los estados naturales entre todos los estados posibles. Así, las moléculas de gas que ocupan un volumen dado pueden en principio repartirse de maneras muy diversas; podemos imaginar, por ejemplo, que todas se encuentran amontonadas en un rincón, ejerciendo localmente una presión muy alta, sin ocupar la mayor parte del volumen, donde existe momentáneamente un vacío absoluto. Pero dicho estado, si bien es posible teóricamente, no es natural, en el sentido de que el sistema lo abandonará espontánea y rápidamente para volver hacia su estado natural, el equilibrio termodinámico; la presión y la temperatura serán uniformes en el recipiente, y están ligadas al volumen por la ley de Mariotte.

Sin embargo —y ésta es la aportación de la teoría del caos—, proponer un modelo determinista es también dejar un lugar al azar, una dimensión a lo imprevisible. Es cierto que el sistema está confinado a su atractor extraño, pero su movimiento dentro del atractor se nos escapa. Más precisamente, el tiempo característico *T* establece un límite para las posibilidades de previsión; recordemos que es el tiempo necesario para que un error de posición o de movimiento se multiplique por diez. Para duraciones inferiores a *T*, se puede seguir el sistema por medio del cálculo, sin problema. Para duraciones superiores a 10 *T*, se pierde la pista por completo; lo único que se puede decir —y ya es una precisión importante— es que el sistema está en algún lugar del atractor extraño. Dónde exactamente, lo ignoramos.

¡Qué dosificación admirable del azar y de la necesidad! … Se resuelven de golpe un ejército de problemas falsos relativos a la libertad humana en un universo determinista. Ya percibimos, como lo hacía Laplace, un cielo despejado abierto a un horizonte infinito, que sin embargo es tan claro que tenemos la impresión de poder tocarlo. Tampoco es un cielo nublado, ahogado por una bruma que limita la vista y nos priva del horizonte. Lo que observamos son dos conjuntos, como un cielo de lluvia, donde la tormenta nos permite una vista hacia los horizontes lejanos cargados de Sol.

Entre el modelo y la realidad: el cálculo

Sin embargo, a pesar de su profundidad y su belleza, dicha visión no es, a nuestro modo de ver, el aporte más importante de la teoría del caos. Antes hemos hablado de ese margen tenue que separa el cero matemático de casi nada, la exactitud absoluta de la mejor aproximación. Dicho margen se acomoda entre el modelo matemático y el sistema físico que supuestamente representa. Durante cuatro siglos pasó inadvertido, porque las técnicas de cálculo disponibles limitaban estrictamente el uso de modelos deterministas, así como su confrontación con la realidad física. Gracias a la teoría del caos, dicho margen se discierne por fin, y en el futuro el desarrollo de la ciencia le dedicará una atención cada vez mayor. Se ha descubierto un espacio intermedio entre el modelo matemático y la realidad física, el espacio del cálculo.

Aclaremos esto. Hasta la invención de las computadoras, los únicos cálculos que se podían llevar a cabo eran los que se resolvían con papel, lápiz y goma de borrar. Salvo raras excepciones, a las cuales regresaremos, eso quiere decir que solamente se podían resolver ecuaciones lineales. En la naturaleza, existe cierto número de sistemas que se rigen por este tipo de ecuaciones. Dichos sistemas lineales siempre tienen un comportamiento muy sencillo: nunca son caóticos, sus trayectorias siempre son previsibles, y sus movimientos regulares. Hasta los años cincuenta eran los únicos sistemas con los que se podían calcular trayectorias y estudiar los movimientos de éstas. La atención de los científicos se ha dirigido de manera natural a ellos, y, durante cuatro siglos, hemos visto desarrollarse montones de modelos lineales de diversos fenómenos, que van de la física a la economía. A lo largo de todo este tiempo, el modelo lineal ha sido el rey. Se ha utilizado incluso para estudiar sistemas caóticos, como la meteorología, porque el modelo exacto contiene ecuaciones no lineales que no se pueden resolver. A falta del modelo exacto, se construyen modelos lineales cada vez más complicados, que se acercan cada vez más al sistema bajo consideración, del cual, como ahora sabemos, nunca darán una idea exacta.

En breve, hasta el siglo XX, se confunde la noción de modelo determinista con la de modelo lineal. Es lo que explica, por ejemplo, el error de Laplace. Éste y sus predecesores habían construido un modelo lineal muy perfeccionado para representar el sistema solar. Laplace creía que las propiedades de su modelo eran las mismas que las del sistema, y que por tanto dicho sistema era estable. Empero, su modelo no era más que una aproximación, precisamente por ser lineal, mientras que el sistema es no lineal, y ahora sabemos que dicha aproximación carece de valor más allá del tiempo característico, o sea, cien millones de años, más o menos. No había manera de que Laplace se enterara de eso, porque no tenía los medios de hacer los cálculos directamente sobre un modelo no lineal, y así conocer la calidad de su aproximación (excelente, digámoslo una vez más, a la escala humana con los *medios a bordo*).

Hizo falta llegar al siglo XX para que se entendiera que los modelos no lineales tienen propiedades fundamentalmente diferentes de los modelos lineales. El siglo empieza con la gran obra de Poincaré, *Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, donde expone que los modelos lineales usados por sus predecesores, por más sofisticados que sean, jamás podrán dar una idea exacta del comportamiento a largo plazo de las órbitas de los planetas, y que el modelo exacto, no lineal, puede ocultar trayectorias de una complejidad hasta entonces insospechada. Al cierre de siglo, la teoría del caos aporta la más brillante confirmación a la intuición de Poincaré, y actualmente nuestro conocimiento de los modelos no lineales está respaldado por una multitud de resultados experimentales, simulaciones numéricas y teoremas matemáticos. Mientras tanto, se ha iniciado la revolución informática, que por fin permite calcular soluciones a ecuaciones no lineales y representarlas gráficamente: sin eso, seguiríamos sin conocer el atractor de Lorenz y el carácter caótico del sistema solar.

Por fin, gracias a las computadoras, se pueden emplear los modelos no lineales. La simulación numérica nos revela sus características, muy diferentes a las de los sistemas lineales, y el análisis matemático nos lo confirma. La teoría del caos nace del encuentro del matemático y la computadora. La computadora indica al matemático los fenómenos que han de estudiarse, y el matemático pone en evidencia los límites de la computadora. Dentro de un sistema caótico, ciertos cálculos están desprovistos de significado físico: podemos preguntar a la computadora el tiempo que hará en París dentro de dos años. Si la dejamos trabajar el tiempo suficiente, nos dará una respuesta, pero no existe esperanza alguna de que dicha respuesta calculada sea mejor que las que yo podría adivinar basándome en los promedios estacionales.

Nos encontramos en el inicio de una revolución en los conceptos de las teorías científicas. De ahora en adelante, la correspondencia entre la realidad física y el modelo matemático ya no es inmediata: pasa por un cálculo. Nunca más se dirá: tal ecuación representa tal fenómeno. Hará falta añadir: el sistema es caótico, su tiempo característico es de tanto, hay que saber que más allá de dicha duración, ciertos cálculos ya no representan nada, y si se quisiera calcular tal cantidad haría falta utilizar un método determinado en vez de otro. En otras palabras, ya no se podrá enunciar una teoría científica sin decir lo que se puede y lo que no se puede calcular en dicha teoría, indicando en cada caso los medios apropiados de cálculo. Ya se sabía que las teorías científicas tenían límites de validez relacionados con las fenómenos físicos: el dominio de la mecánica clásica, por ejemplo, está limitado de un lado por la mecánica cuántica, y del otro por la mecánica relativista. De aquí en adelante, hará falta acostumbrarse a que tengan también límites de naturaleza numérica.

Creo que dicha revolución también se extenderá a la enseñanza de las matemáticas, donde los problemas ligados al cálculo asumirán una importancia considerable. Para dar un ejemplo, los alumnos aprenden a resolver la ecuación algebraica de segundo grado,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

por medio de la célebre fórmula:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

¿No les parece que ya va siendo hora, después de tantos siglos, de reconocer que dicha solución no es tal? Porque, en fin, ¿cómo calculamos esta raíz cuadrada? Si por ejemplo queremos resolver

$$x^2 + 4x - 3 = 0$$

obtenemos

$$-2 \pm \sqrt{7}$$

¡Cuánto hemos avanzado! Hace falta resolver:

$$x^2 - 7 = 0$$

Que nombremos $\sqrt{7}$ como solución no significa que la sepamos calcular. En cuanto a buscar su valor en una tabla, o sacar la calculadora, volvemos a esquivar la dificultad, y a apoyarnos sobre un cálculo que ya ha sido efectuado. ¿Cómo y por quién?

Lo único que hemos hecho es llevar una ecuación de segundo grado a otra. Eso no es resolverla, y si nos quedamos ahí, damos a los alumnos una idea falsa de lo que son las matemáticas y de lo que pueden esperar de ellas. Resolver la ecuación requiere ser capaces de calcular sus soluciones, es decir, dar sus valores con toda la precisión que se pueda. Aquí es donde empiezan los problemas interesantes. Los métodos utilizados para calcular valores numéricos como $\sqrt{7}$ son, de hecho, procedimientos para mejorar un valor aproximado: partiremos de un valor inicial, 3, por ejemplo, y a continuación aplicaremos el procedimiento una vez, luego una segunda vez, una tercera, y así seguiremos. Si queremos nueve decimales, detendremos el procedimiento cuando se obtengan sucesivamente dos números que coincidan hasta el noveno decimal, lo cual provoca un sinnúmero de preguntas: ¿Dará siempre resultado el procedimiento? ¿Se podrán calcular las dos soluciones de esa manera? ¿Qué influencia tiene el punto de partida escogido? Aquí estamos en un dominio muy cercano a la práctica, donde la computadora puede aportar un ayuda apreciable para visualizar los problemas y forjar una intuición. Las preguntas que se plantean no son menos delicadas, y dan lugar a desarrollos matemáticos muy interesantes. Basta ampliar ligeramente el cuadro, trabajar en el plano complejo o con ecuaciones de grado superior, para que el procedimiento de cálculo se torne caótico y engendre una sucesión de valores dispersos, en vez de converger discretamente hacia una solución.

En un artículo célebre, el físico David Ruelle postula la pregunta de que, si las matemáticas son naturales, ¿habrían desarrollado las mismas matemáticas pequeños humanoides verdes, que vivieran en un planeta que gravitase alrededor de tres soles rojos, cuyo universo físico produjera una experiencia completamente diferente a la nuestra? Quizás nunca lo sepamos. No obstante, vivimos ahora una experiencia análoga: de aquí en adelante, el universo de los hombres cambia en virtud de la potencia del cálculo accesible. Transforma el ambiente, transforma las sociedades, los transforma a ellos mismos y transforma a la ciencia. La teoría del caos es un principio, no un final.

ANEXOS

GLOSARIO

ecuaciones de Navier-Stokes: rigen los flujos de líquidos compresibles (aire) o no compresibles (agua).

cálculo de probabilidades: teoría matemática basada en las obras de Pascal y Laplace, modernizada por Kolmogorov. Al principio, tenía como misión determinar la indemnización de los jugadores en los juegos de azar (de la palabra árabe *azahr* que significa "azar" o la circunstancia en que se interrumpe el juego). A continuación, se adoptó en forma de teoría y método de cálculo para la descripción de todo evento aleatorio (de la palabra latina *alea*, "dados").

lema: enunciado matemático de carácter generalmente técnico, cuya demostración es delicada.

Ley de Mariotte: señala que la presión de un gas perfecto es proporcional a su masa volumétrica y a su temperatura absoluta.

Ley de Newton: postula que la materia atrae a la materia, y que la fuerza de atracción entre dos cuerpos es proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias

modelo determinista: un modelo es determinista si no aplica el cálculo de probabilidades* (*véase* Probabilidades).

modelo estocástico: un modelo es estocástico si utiliza el cálculo de probabilidades* (*véase* Probabilidades).

modelización: construcción (intelectual) de un modelo matemático, es decir, de una red de ecuaciones que describen la realidad.

tiempo característico: un sistema caótico amplía las desviaciones iniciales. El tiempo característico del sistema es el tiempo al cabo del cual las desviaciones se multiplican por diez: dos trayectorias distantes *d* a la partida se encontrarán a 10 *d* al cabo del tiempo característico.

teoría de Galois: teoría que estudia las propiedades de las ecuaciones algebraicas, basada en los trabajos de Nils Abel (1802-1829) y Évariste Galois (1811-1832).

teoría de los números: disciplina matemática que estudia las propiedades de los números enteros.

BIBLIOGRAFÍA

Chabert, J.-L., K. Chemla y A. Dahan Dalmedico (dir.), *Chaos et déterminisme*, col. "Points Sciences", Le Seuil, 1992.

Crichton, M., *Le Parc jurassique*, Laffont, 1992 (excelente ciencia-ficción, con una visión muy personal de la inestabilidad en relación con las condiciones iniciales).

Ekeland, I., *Le Calcul, l'Imprévu*, Le Seuil, 1984.

Ekeland, I., *Au hasard*, Le Seuil, 1991.

Gleick, J., *La théorie du chaos: vers une nouvelle science*, col. "Champs", Flammarion, 1991 (edición original, Viking Press, 1987).

Morrison, P. y P., *Les Puissances de dix*, col. "L'Univers des sciences", Pour la science, Belin, 1984.

L'ordre du chaos, col. "Bibliothéque pour la science", Pour la Science, 1992.

Poincaré, H., *La Science et l'Hypothése*, col. "Champs", Flammarion, 1968.

REFERENCIAS DE AUTORES Y OBRAS CITADAS

p. 22: Morrison, P., *Powers of Ten*, Scientific American Library, 1982. Película: *Powers of Ten*, realizada por la agencia Charles & Ray Eames para IBM, 1977, Pyramid Films, Santa Mónica, California.

p. 28: Newton, I., *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, J. Gabay, 1990.

p. 32: Sussman, G. J. y J. Wisdom, "Numerical evidence that the motion of Pluto Is Chaotic", en *Science*, vol. 241, 1988.

p. 32: Laskar, J., "A Numerical Experiment on the Chaotic Behaviour of the Solar System", en *Nature*, vol. 338, 1989.
p. 44: Poincaré, H., *Science et Méthode*.
p. 81: Poincaré, H., *Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Éd. A. Blanchard, 1987.
p. 85: Ruelle, D., "Are our Mathematics natural?", en *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 19, 1988.

ÍNDICE TEMÁTICO

IVAR EKELAND. Nació en 1944. Es profesor de matemáticas en la Universidad París-Dauphine, institución que dirigió de 1989 a 1994. Su obra científica aborda temas de dinámica, geometría y problemas matemáticos planteados por la economía y la gestión. Ha recibido varias distinciones por su trabajo de divulgación, entre otras el premio Jean-Rostand, y el premio d´Alembert. Ha publicado *Le calcul, l´imprévu* [*El cálculo, lo imprevisto*] (Le Seuil, 1984) y *Au hasard* [*Al azar*] (Le Seuil, 1991).

ÍNDICE

formación de interiores: maría luisa martínez passarge
tipografía: minion 10/12
impreso en cia gráfica la aldea, s.a. de c.v.
san pedro 5 nave 2
col. guadalupe del moral
09300 méxico, d.f.
cuatro mil ejemplares y sobrantes
18 de septiembre de 2002